

Investigaciones en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con aplicaciones a problemas físicos.

por

Mag. Julio Fernando Abalos

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de

Doctor en Física

de la

Universidad Nacional de Córdoba



2018

©FAMAF – UNC 2018

Director: Dr. Oscar Reula



Investigaciones en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con aplicaciones a problemas
físicos por Julio Fernando Abalos se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons](#)
[Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](#).

*“Cuando uno puede darse cuenta
del placer de dudar,
de frustrarse con un problema
y que eso no va en desmedro de la
persona, entonces empieza a aprender.”*

Adrián Paenza

Resumen

Una de las características más importantes de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, que pretendan describir física, es que posean una formulación de valores iniciales bien puesta. Es decir, dados ciertos datos iniciales para algún tiempo inicial, las soluciones del sistema deben cumplir las siguientes tres condiciones: existir localmente, ser únicas y continuas en esos datos iniciales. Esta propiedad es fundamental en problemas físicos, debido a que garantiza el poder de predictibilidad de la teoría.

Dentro de la clase de sistemas bien puestos, se encuentran los fuertemente hiperbólicos [1], estos son los que estudiaremos en esta tesis. Consideraremos teorías en derivadas parciales de primer orden, cuasi-lineales y con vínculos diferenciales. En estos casos, el número de ecuaciones es más grande que el número de campos a resolver, por lo que no pueden aplicarse los métodos standard para hiperbolicidad fuerte de la teoría de Kreiss. Para lidiar con este problema se introduce un nuevo tensor, llamado reducción. Este selecciona un subconjunto de ecuaciones con el objetivo de usarlas como ecuaciones de evolución para los campos a resolver. Cuando las mismas resultan fuertemente hiperbólicas llamamos a esa reducción hiperbolizador. Es de interés, tanto a nivel teórico como numérico, construir una teoría general que nos permita comprender qué condiciones garantizan la existencia (o la no existencia) de hiperbolizadores y obtener métodos para construirlos. Es por ello que en esta tesis se responde parcialmente esa incógnita.

Es conocido que el tensor que acompaña a las derivadas primeras, llamado símbolo principal, juega un papel importante en la teoría. Por lo que gran parte de la tesis es el estudio de sus propiedades, que nos permite obtener información sobre cómo construir hiperbolizadores.

Como primer resultado [2], hemos encontrado que para teorías cuasi-lineales, una condición necesaria para que exista un hiperbolizador es que los valores singulares de ciertas familias mono-paramétricas (ε) de perturbaciones del símbolo principal, sean solo de orden $O(\varepsilon^0)$ o $O(\varepsilon^1)$. Por lo que hemos desarrollado un mecanismo que permite identificar, de un modo muy sencillo, teorías mal puestas. Usando esta herramienta, hemos mostrado que las ecuaciones que describen la electrodinámica de Force Free en su versión de potenciales de Euler y los fluidos cargados con conductividad finita, son débilmente hiperbólicas.

Como nuestro segundo resultado [3], hemos estudiado las teorías con coeficientes constantes, y concluimos que una condición necesaria y suficiente para hiperbolicidad

fuerte, es que exista un ángulo máximo $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, tal que los ángulos principales de ciertos subespacios vectoriales asociados al kernel por derecha y por izquierda del símbolo principal, estén acotados superiormente por el mismo. Este resultado es alcanzado considerando la descomposición de Kronecker de la parte principal y construyendo explícitamente los hiperbolizadores. Esto es posible debido a que en teorías hiperbólicas (no necesariamente fuertemente hiperbólicas), esta descomposición queda limitada a solo dos tipos de bloques: bloques de Jordan y bloques que llamaremos de vínculos. Por otro lado, cuando la condición de ángulo máximo se cumple, es posible observar que los bloques de Jordan se vuelven diagonales y usar las mismas expresiones de la descomposición para encontrar explícitamente los hiperbolizadores punto a punto. Como ejemplo de aplicación estudiamos la teoría de Klein Gordon, mostrando su estructura de Kronecker y sus hiperbolizaciones.

Como tercer resultado [3], estudiamos teorías electrodinámicas no lineales, surgidas de lagrangianos arbitrarios en término de los invariantes electromagnéticos. Estas teorías presentan relaciones de dispersión definidas en términos de dos métricas lorentzianas efectivas. Hemos probado que estas teorías son simétricas hiperbólicas (una clase dentro de las fuertemente hiperbólicas) si y solo si, los conos temporales de esas métricas efectivas tienen intersección no vacía. Para ello hemos construido hiperbolizadores explícitos, llamadas simetrizadores [4]. Además hemos aplicado este resultado a ejemplos de interés físico: a las teorías electromagnéticas de Born-Infeld, Gauss-Bonnet y Euler-Heisenberg. Estas resultan simétricas hiperbólicas cuando ciertas restricciones sobre los campos electromagnéticos son impuestas. Por último, hemos construido una teoría electrodinámica de juguete, que resulta simétrica hiperbólica, pero cuyos conos de propagación no tienen intersección con los conos de la métrica de fondo.

Para finalizar, estudiamos la teoría de vínculos y su conexión con la descomposición de Kronecker del símbolo principal. En los casos mas simples de la descomposición, obtenemos ecuaciones de evolución para el sistema subsidiario de vínculos y condiciones de integrabilidad necesarias para que los vínculos se conserven. Estas ecuaciones parecen ser naturalmente fuertemente hiperbólicas si el sistema original es hiperbolizable, por lo que en estos casos los vínculos se mantienen satisfechos. Por otro lado, cuando la descomposición de Kronecker se vuelve mas compleja, aparecen vínculos ocultos de mayores derivadas. Debido a que no hay una teoría asociada a estos casos, no es posible asegurar que los mismos se conservan durante la evolución.

Palabras claves:

Sistemas cuasi-lineales - Sistemas de coeficientes constantes - Símbolo principal - Vínculos diferenciales - Fuertemente Hiperbólico - Simétrico Hiperbólico- Ecuaciones de evolución - Hiperbolizadores - Descomposición en valores singulares - Descomposición de Kronecker - Sistema subsidiario de vínculos - Vínculos ocultos - Force Free y potenciales de Euler - Fluidos cargados con conductividad finita - Electrodinámica no lineal - Born-Infeld - Gauss-Bonnet - Euler-Heisenberg.

Índice general

1	Introducción	1
2	Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.	7
2.1	Introducción.	7
2.2	Vínculos de Geroch	10
2.3	Sistemas de coeficientes constantes sin vínculos.	12
2.4	Sistemas de coeficientes constantes con vínculos.	16
2.5	Sistemas cuasi-lineales.	17
2.6	Modos y velocidades características.	19
3	Condición necesaria para Hiperbolicidad Fuerte.	23
3.1	Introducción.	23
3.2	Resultados.	24
3.3	Pruebas de los teoremas 10 y 11.	26
3.3.1	Operadores cuadrados.	27
3.3.2	Operadores rectangulares.	32
3.4	Aplicaciones y ejemplos.	33
3.4.1	Ejemplo 2×2	34
3.4.2	Electrodinámica de Force Free en la forma de potenciales de Euler	35
3.4.3	Fluidos cargados con conductividad finita	38
3.4.3.1	Caso sin conductividad $\sigma = 0$	41
3.5	Conclusiones.	41
4	Condiciones Necesarias y suficientes para hiperbolicidad fuerte.	43
4.1	Introducción	43
4.2	Resultados	44
4.3	Prueba del teorema 21.	47
4.3.1	Descomposición de Kronecker de pencils.	47
4.3.2	Condición necesaria para hiperbolicidad fuerte.	48
4.3.3	Construyendo reducciones.	50
4.3.4	Eligiendo los autovalores extras.	56
4.3.5	Cota inferior uniforme e hiperbolicidad fuerte.	57
4.4	Klein Gordon.	59

4.5	Conclusiones.	62
5	Electrodinámica no lineal.	65
5.1	Introducción.	65
5.2	Aspectos generales de la teoría.	66
5.2.1	Lagrangianos y ecuaciones de movimiento.	66
5.3	Estructura característica y métricas efectivas.	67
5.3.1	Estructura geométrica: conos y coconos.	68
5.3.1.1	F_{ab} no degenerado ($F^2 + G^2 \neq 0$)	68
5.4	Resultados principales.	71
5.5	Pruebas de los teoremas 27 y 28	74
5.6	Ejemplos.	76
5.6.1	Born-Infeld.	77
5.6.2	Electrodinámica de la teoría de Kaluza-Klein.	78
5.6.2.1	Electrodinámica de Gauss-Bonnet.	78
5.6.2.2	Euler-Heisenberg	79
5.6.3	Teoría de juguete.	80
5.7	Conclusiones.	80
6	Vínculos y bloque L_m^T.	83
6.1	Introducción.	83
6.2	Integrabilidad de los vínculos L_0^T y L_1^T	84
6.3	Vínculos ocultos y bloques L_m^T con $m \geq 2$	88
6.4	Conclusiones.	89
7	Conclusiones y trabajo futuro.	91
A	Descomposición en valores singulares	95
B	Invariancia de los ordenes de los valores singulares.	99
C	Prueba del teorema 20.	101
D	Descomposición de Kronecker de sistemas hiperbólicos.	105
	Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

La mayoría de los modelos físicos vienen dados en términos de ecuaciones en derivadas parciales. Una pregunta importante es si cada uno de estos modelos tiene una formulación de valores iniciales que sea *bien puesta o well posed* en inglés. Esta condición es la raíz de la física, ya que garantiza el poder de predictibilidad de la teoría. Un conjunto de ecuaciones diferenciales se dice bien puesto si: existe localmente alguna solución, esta es única y es continua en el dato inicial [5]. Notemos que la primera condición solo requiere la existencia local. En la segunda, cuando decimos que una solución es "única", nos referimos a que la misma es única dentro de una cierta clase de funciones. En principio consideraremos funciones suaves en L_2 y con soporte compacto. La tercera significa que si producimos pequeñas perturbaciones en el dato inicial (pequeñas en la norma L_2), la solución se mantendrá cercana a la solución original, un requerimiento que esperamos las teorías físicas cumplan. De no ser así, no podríamos corroborar que tal teoría corresponde a un dado fenómeno, puesto que cualquier medición física siempre conlleva errores y no podríamos decidir con qué solución comparar. Por otro lado, si tratáramos de resolver el problema numéricamente los errores numéricos implicarían que paso a paso vamos cambiando de solución, pero estas se alejan las unas de las otras, por lo tanto cualquier resultado numérico representaría una mezcla de soluciones distantes las unas de las otras, sin ningún sentido físico.

En esta tesis estudiamos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden en derivadas parciales que incluyen vínculos diferenciales (también de primer orden en derivadas) y que pretenden describir física. A estos sistemas los llamamos *sistemas generales de primer orden*. Estas teorías son de interés ya que la mayoría de las ecuaciones de la física pueden llevarse a esta forma. En particular estudiamos teorías *fuertemente hiperbólicas*. Esta clase de sistemas se encuentra dentro de la clase de teorías bien puestas y estables ante términos de menores ordenes en derivadas (sin derivadas, en nuestro caso) [6], [7]. Un sistema particular, es fuertemente hiperbólico dependiendo de su comportamiento en altas frecuencias. A grandes rasgos (profundizaremos la definición en el capítulo 2) si toda perturbación de alta frecuencia posee velocidades de propagación finita y reales, entonces diremos que el sistema es *hiperbólico*. Si además, cualquiera de

esas perturbaciones, puede ser expandida punto a punto, en términos de ondas planas, entonces el sistema es fuertemente hiperbólico. Cuando el sistema solo sea hiperbólico y no fuerte, diremos que es *débilmente hiperbólico*. Estos sistemas no son bien puesto ante cualquier tipo de perturbaciones de menores ordenes en las derivadas, por lo que son llamados *mal puestos o ill posed*.

Generalmente, en física, estos sistemas aparecen como un conjunto de e ecuaciones diferenciales, sobre una variedad M de dimensión $n + 1$, para ciertos u campos desconocidos, tal que el número de ecuaciones es mayor o igual que el numero de campos $e \geq u$. La forma en la que se trata esta clase de problemas es dividir este conjunto en dos subconjuntos, el de *ecuaciones de evolución* (u ecuaciones) y el de *vínculos* (c ecuaciones), tal que $e = u + c$. En donde, dada una cierta foliación Σ_t local de M , parametrizada en términos del parámetro t que llamamos tiempo, el *problema de valores iniciales* radica en resolver las u ecuaciones de evolución para los u campos en $t > 0$, con dato inicial (en L_2) sobre $\Sigma_{t=0}$. Si este conjunto de ecuaciones de evolución es fuertemente hiperbólico, entonces decimos que el sistema es fuertemente hiperbólico (notese que los vínculos son dejados de lado por el momento). La teoría para sistemas de evolución ya ha sido desarrollada, ver [6], [7], un análisis mas completo puede encontrarse en [8], y un par de reviews sobre estos temas desde un enfoque mas físico en [9], [10].

Por otro lado, el papel que juegan los vínculos es el de restringir los datos iniciales (para los u campos), que podemos seleccionar sobre $\Sigma_{t=0}$, de tal forma que estos cumplan las ecuaciones de vinculo. Sin embargo, podría suceder que las soluciones obtenidas (de las ecuaciones de evolución) cumpliendo los vínculos en tiempo $t = 0$, fallen en cumplirlos para tiempos posteriores. Por lo que parte del problema es probar que el sistema subsidiario de vínculos también evoluciona de manera fuertemente hiperbólica, de este modo, dado que los vínculos se cumplen sobre $\Sigma_{t=0}$ ellos permanecerán así para tiempos posteriores por unicidad de la solución.

Una pregunta que surge es: ¿quienes son las ecuaciones de evolución y de vínculos?. Geroch en [4] muestra una forma geométrica y covariante de definir las ecuaciones de vínculos de forma única. Sin embargo esto no puede hacerse con las ecuaciones de evolución. Ya que, dado un sistema de ecuaciones de evolución arbitrario, siempre podemos combinarlo linealmente con los vínculos (a esto proceso lo llamamos *elegir una reducción del sistema*) y obtener un nuevo sistema de evolución. En principio, esperamos que las soluciones de ambos sistemas sean las mismas, ya que sumar términos de vínculos a la evolución es como sumar "ceros". Sin embargo, esto no necesariamente es cierto, y en general sucede que diferentes reducciones pueden llevar a ecuaciones de evolución fuerte o débilmente hiperbólicas. Esta ambigüedad ocurre debido a que en las ecuaciones de evolución hay mas grados de libertad que los físicamente relevantes. De este modo, una reducción no fuertemente hiperbólica, indica que la evolución de los grados físicos es intrínsecamente mal puesta, y por lo tanto, no existe ninguna reducción fuertemente hiperbólica; o que la evolución de los grados de libertad extras, a sido mal elegida. Posibles consecuencias de este segundo caso son: que los vínculos dejen de cumplirse fuera de

la superficie inicial y por lo tanto no obtenemos soluciones del sistema completo; o que las soluciones, de estos grados de libertad extras, no sean continuas en el dato inicial, y por lo tanto, comparando soluciones obtenidas de datos iniciales que cumplen los vínculos, inicialmente y en la evolución, y datos cercanos a cumplirlos inicialmente (eligiéndolos de frecuencias altas), estas se alejan las unas de las otras tan rápido como queramos. En todos estos casos, además de la cuestión teórica, es claro que no es posible plantear ninguna implementación numérica.

Todo lo anterior muestra que es de suma importancia encontrar un conjunto de ecuaciones de evolución fuertemente hiperbólicas para cada teoría. Cuando esto sucede llamamos a esas reducciones *hiperbolizaciones o hiperbolizadores*. Por otro lado, este fenómeno a dado lugar a un sin fin de trabajos en física, en donde para cada teoría se elige una hiperbolización especial, construida para el problema específico. Algunos ejemplos son: Ecuación de onda [4], Electrodinámica [4], Electrodinámica de Force Free [11],[12], Electrodinámica no lineal [13], Klein Gordon [4], Relatividad General en sus distintas formulaciones [14], [15], [16], [17], etc.

Sin embargo no hay una teoría general sobre reducciones, ni sobre los sistemas subsidiarios de vínculos que nos permita conocer de antemano, cuando existe una reducción, o no existe ninguna, y si esas reducciones preservan los vínculos o no. Por este motivo, esta tesis responde parcialmente a la primer parte de este problema, es decir, a la construcción de una teoría general asociada a las reducciones. Y comentamos que sucede con los sistemas subsidiarios en los casos mas simples.

En general este problema se traduce en un problema algebraico en primera instancia, pasando después a un problema de suavidad de los campos. Nosotros nos concentraremos mayormente en la parte algebraica. Mostrando, por ejemplo, en el caso de coeficientes constantes criterios necesarios y suficientes que permiten decidir cuando un sistema tiene una hiperbolización y cuando no. Estas condiciones se vuelven necesarias en el caso cuasi-lineal.

Un esquema de la tesis es el siguiente:

En el capítulo 2, introducimos la notación que usaremos a lo largo de la tesis. Presentamos los resultados conocidos sobre hiperbolicidad fuerte. Se introducen las reducciones y las ecuaciones de evolución. Se definen los vínculos de Geroch. Y se define hiperbolicidad fuerte para el caso de coeficientes constantes, en términos del teorema de Matrices de Kreiss. Se generalizan estas ideas para el caso *cuasi-lineal*. Por ultimo se define sistemas simétricos hiperbólicos.

En el capítulo 3, empezamos con nuestro primer resultado, este trabajo es de mi autoría [2]. Usando la descomposición en valores singulares para matrices no cuadradas, obtenemos una condición necesaria para la existencia de una hiperbolización en el caso cuasi-lineal. Hemos probado que si algún valor singular de ciertas familias monoparamétricas (ε) de perturbaciones, del *símbolo principal* (termino con derivadas primeras del sistema de ecuaciones), es de orden $O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$, entonces no existe ninguna hiperbolización del sistema. Esta condición puede ser chequeada sin la necesidad de calcular los valores

singulares, sino de forma simple e invariantes usando bases de los núcleos por derecha y por izquierda del símbolo principal. Por otro lado mostramos ejemplos de aplicación: se observa como las perturbaciones de los valores singulares definen la descomposición de Jordan de una matriz de 2×2 y en lo que respecta a ejemplos físicos, se muestra que tanto la Electrodinámica de Force Free en termino de los potenciales de Euler, como los fluidos cargados, con conductividad finita, son débilmente hiperbólicos.

En el capítulo 4, introducimos nuestro segundo resultado [3], este trabajo se realizó con el Dr. Oscar Reula. En el mismo estudiamos sistemas generales de primer orden con coeficientes constantes y mostramos una condición necesaria y suficiente, para decidir cuando el sistema es fuertemente hiperbólico y encontrar reducciones explícitamente. Esta condición se da en término de los ángulos principales entre los núcleos por derecha e izquierda del símbolo principal. Por otro lado, las reducciones resultan del tipo pseudo-diferencial o diferencial dependiendo de cada teoría. Y son construidas usando la descomposición de Kronecker del símbolo principal. Esta descomposición también muestra como es la estructura algebraica de los vínculos. En el caso cuasi-lineal, estos resultados se vuelven una condición necesaria. Como ejemplo de aplicación mostramos la teoría de Klein Gordon.

En el capítulo 5, presentamos nuestro tercer trabajo [13], el mismo se realizó con la colaboración de los Doctores Federico Carrasco, Erico Goulart y Oscar Reula. En este capítulo estudiamos teorías no lineales electromagnéticas, surgidas de lagrangianos completamente arbitrarios construidos con los invariantes electromagnéticos de la teoría. Mostramos que la teoría es simétrica hiperbólica si y solo si los conos temporales, surgidos de su relación de dispersión, tiene intersección. Para ello construimos explícitamente los hiperbolizadores/simetrizadores. Para cerrar este capítulo, mostramos algunos ejemplos de aplicación, ellos son: la electrodinámica de Born-Infeld, Gauss-Bonnet, Euler-Heisenberg y una teoría de juguete. Aunque este fue el primer trabajo realizado, el mismo se ubica en este capítulo debido a que es un ejemplo concreto de aplicación, que puede ser explicado en términos de la teoría general desarrollada en los capítulos previos.

En el capítulo 6, introducimos la relación entre vínculos y la estructura de Kronecker del símbolo principal. Siguiendo las ideas de Reula y Geroch [18, 4], conectamos algunos de sus resultados con la descomposición de Kronecker presentada en el capítulo 4. Cuando el sistema es hiperbolizable y solo tiene vínculos de Geroch, encontramos las ecuaciones de evolución del sistema subsidiario de vínculos. Estas parecen ser naturalmente fuertemente hiperbólicas. Además aparecen condiciones de integrabilidad que involucran términos de menores ordenes en derivadas del sistema general. Aunque no es conclusivo, cuando estas se satisfacen, los vínculos parecen conservarse durante la evolución. También se generaliza la definición de Geroch de vínculos, y se observa que cuando estos nuevos vínculos son parte del sistema, los mismos acarrearán vínculos ocultos de mayores derivadas. Todos ellos deben satisfacerse para obtener soluciones del sistema completo. Ejemplos de estos casos son las ecuaciones de Killing y de tensores de Killing.

En el capítulo 7 se presenta una conclusión general de la tesis y se comenta sobre las líneas de trabajo que quedan abiertas.

Por último, en el apéndice A se presenta la descomposición en valores singulares y se explica como realizarla. En el apéndice B se demuestra la invariancia de los ordenes de los valores singulares perturbados ante diferentes elecciones de los productos internos y se muestra un teorema para el calculo del primer orden de perturbación de los mismos. En el apéndice C se prueba el teorema 20 del capítulo 4, que incluye una equivalencia mas al teorema matricial de Kreiss. Para finalizar, en el apéndice D se explica como realizar la descomposición de Kronecker de un matriz pencil.

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

2.1. Introducción.

Resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales sujetas a un dato inicial o una condición de contorno, es comúnmente llamado el problema de Cauchy. Estamos interesados en el primer caso, es decir, el problema de valores iniciales. En particular estudiaremos teorías hiperbólicas con vínculos diferenciales. Es por ello, que en esta sección, siguiendo los trabajos [4, 9, 2, 3], introducimos las nociones de hiperbolicidad fuerte para las teorías cuasi-lineales de la forma

$$\mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa}(x, \phi) \nabla_a \phi^{\gamma} = J^A(x, \phi) \quad (2.1)$$

Con dato inicial

$$\phi^{\alpha}|_{\Sigma_0} = \phi_0^{\alpha} \quad (2.2)$$

sobre alguna hipersuperficie Σ_0 .

Consideramos las ecuaciones (2.1) sobre una variedad real M (espacio tiempo), con x^a puntos en la misma y tal que $\dim M = n + 1$. Los campos ϕ^{γ} son secciones de un fibrado vectorial $b \xrightarrow{\pi} M$, estos son los que deseamos encontrar. Para cada x^a ellos son un elemento de la fibra¹ Φ_R , este espacio vectorial tiene dimensión $\dim(\Phi_R) = u$. Los símbolos $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa}$ y J^A son tensores sobre b dados por cada teoría física en estudio; cuando $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa}$ es contraído con un co-vector l_a es llamado símbolo principal del sistema $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} l_a$. Las letras minúscula de imprenta a, b, c, \dots representan índices de espacio-tiempo, las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ representan índices de campos, tal que $|\alpha| := \dim(" \alpha ") = u$ y estamos usando la notación de Einstein donde índices repetidos se suman. Por último, las letras mayúsculas de imprenta A, B, \dots están asociadas a un espacio vectorial no completamente especificado que llamaremos el espacio de ecuaciones. Este espacio en general es un producto multi-tensorial que incluye tensores en M y b , es decir una combinación

¹La dependencia en x^a es suprimida, ya que siempre estaremos considerando elementos x^a en M genéricos. Lo mismo sucede para el espacio Ψ_L definido a continuación.

de índices minúsculos de imprenta e índices griegos. Denotamos a este espacio por Ψ_L , cuya dimensión es $\dim(\Psi_L) = |A| = \dim("A") = e$.

Ejemplo: Presentamos las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, con espacio tiempo (M, g_{ab}) y tal que $\dim M = 4$

$$\begin{aligned}\nabla^d F_{dc} &= 0 \\ \nabla_{[f} F_{bc]} &= 0\end{aligned}$$

Donde $(x^a, F_{de}) \in b$, $F_{de} = F_{[de]}$ ². En este caso $\phi^\alpha = F_{de}$, por lo que $\alpha = [de]$ y $u = 6$. Estamos considerando que todos los índices se bajan y suben con la métrica y su inversa respectivamente.

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} \nabla_a \phi^\alpha = \left(\begin{array}{c} g^{a[d} \delta_c^{e]} \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{array} \right) \nabla_a F_{de} = 0 \quad (2.3)$$

Donde

$$\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} = \left(\begin{array}{c} g^{a[d} \delta_c^{e]} \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{array} \right), \quad (2.4)$$

con el índice $A = (c, [fbc])$, tal que $e = 4 + 4 = 8$ y $J^A = 0$.

En esta tesis consideramos casos en que el número de ecuaciones es mayor o igual al numero de campos, esto significa que $e \geq u$ (como sucede en el caso de Maxwell $e = 8 \geq 6 = u$). De este conjunto de ecuaciones seleccionaremos u ecuaciones, que llamaremos de evolución, y las restantes como veremos serán vínculos diferenciales, que deberán cumplirse durante la evolución. Introducimos la definición de vínculos en la sección siguiente.

Fijemos un sistema de coordenadas $x^a = (t, x^1, \dots, x^n)$, donde llamamos tiempo a la coordenada t , tal que la misma define una foliación local de M por hipersuperficies $\Sigma_t = \{t = \text{cte}\}$; estas hipersuperficies tienen normal $n_a := \nabla_a t$. Asociado al sistema de coordenadas, tenemos el vector $t^a := (\partial_t)^a$ que por construcción cumple que $t^a n_a = 1$. Esto nos permite definir el proyector $m_b^a := \delta_b^a - t^a n_b$ (donde δ_b^a es el mapeo identidad), tal que, $m_b^a t^b = 0 = m_b^a n_a$. De este modo, podemos reescribir la ecuación (2.1) en su versión en 3+1

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a t^b \partial_b \phi^\gamma + \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} m_b^a \partial_b \phi^\gamma = J^A(x, \phi) \quad (2.5)$$

donde $t^b \partial_b = \partial_t$ representa la derivada temporal, y $m_b^a \partial_b \rightarrow \partial_i$ con $i = 1, \dots, n$ representa derivadas que no tiene proyección en las dirección temporal, es decir, derivadas sobre Σ_t (para cada t). Notemos que los términos de menor orden en las derivadas, surgidos

²Los corchetes $[]$ significan anti-simetrización y los paréntesis $()$ simetrización. Ejemplo $[ab] = \frac{1}{2!}(ab - ba)$.

de la conexión de las derivadas covariantes, fueron absorbidos en J^A . La expresión (2.5) puede reescribirse en el sistema de coordenadas elegido como

$$\mathfrak{N}_\gamma^{A0} \partial_t \phi^\gamma + \mathfrak{N}_\gamma^{Ai} \partial_i \phi^\gamma = J^A(x, \phi) \quad (2.6)$$

Supongamos que podemos encontrar $h^{\hat{\alpha}}_A(x, \phi)$, lo que de ahora en adelante llamaremos reducción, tal que $h^{\hat{\alpha}}_A \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ es invertible. El índice $\hat{\alpha}$ es un índice multi-tensorial, tal que $\dim \hat{\alpha} = \dim \alpha$. Esta reducción permite seleccionar linealmente un conjunto de ecuaciones de (2.5) contrayendo por ejemplo con $\left((h\mathfrak{N}n)^{-1}\right)^\alpha_{\hat{\delta}} h^{\hat{\delta}}_A$ y obtener

$$t^b \nabla_b \phi^\alpha = - \left((h\mathfrak{N}n)^{-1}\right)^\alpha_{\hat{\delta}} h^{\hat{\delta}}_A \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} m^b_a \partial_b \phi^\gamma + \left((h\mathfrak{N}n)^{-1}\right)^\alpha_{\hat{\delta}} h^{\hat{\delta}}_A J^A, \quad (2.7)$$

donde $\left((h\mathfrak{N}n)^{-1}\right)^\alpha_{\hat{\delta}}$ es la inversa de $h^{\hat{\delta}}_A \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$.

Llamamos a este conjunto de u ecuaciones, “*ecuaciones de evolución*”, las mismas son ecuaciones para cada uno de los campos ϕ^α .

Ejemplo: Reducción $h^{\hat{\alpha}}_A$ de las ecuaciones de Maxwell.

Sea $q^{ab} := g^{ab} - \frac{1}{(-g^{ab} \nabla_a t \nabla_b t)} n^a n^b$ el proyector ortogonal a n^a , una posible reducción para las ecuaciones de Maxwell es

$$h^{\hat{\alpha}}_A = \begin{pmatrix} q^{lc} & 0 \\ 0 & q^{rs} \varepsilon_s^{fbc} \end{pmatrix}$$

³donde $\alpha = (l, r)$. Notemos que la $\dim l = \dim r = 3$, ya que q^{ab} proyecta ortogonal a n^a .

Por lo que contrayendo (2.3) con $h^{\hat{\alpha}}_A$ obtenemos

$$\begin{aligned} q^{lc} \nabla^d F_{dc} &= 0 \\ q^{rs} \varepsilon_s^{fbc} \nabla_f F_{bc} &= 0 \end{aligned}$$

estas son $3 + 3 = 6$ ecuaciones de evolución, para los 6 grados de libertad de F_{ab} . Este sistema es fuertemente hiperbólico usando la definición 5, cuando n_a es elegido temporal, es decir, las hipersuperficies Σ_t son espaciales. Estas ecuaciones pueden multiplicarse por $h^{\hat{\delta}}_A \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ una vez elegida la foliación.

Escribiendo F_{ab} en términos de los campos eléctricos y magnéticos E^a y B^a y considerando una métrica plana obtenemos las ecuaciones de Maxwell en su versión clásica.

$$\begin{aligned} \partial_t B &= -\nabla \times E \\ \partial_t E &= \nabla \times B \end{aligned} \quad (2.8)$$

En esta tesis respondemos parcialmente en que casos existe $h^{\hat{\alpha}}_A$ para que las ecuaciones (2.7) sean un conjunto de ecuaciones fuertemente hiperbólicas (con la definición

³Donde ε_{bcfq} es el tensor de Levi Civita.

5); cuando esto sucede llamamos a $h^{\hat{\alpha}}_A$ “hiperbolización o hiperbolizador”. En el caso de coeficientes constantes el programa esta completo, ya que mostraremos condiciones necesarias y suficientes y la forma explícita de construir $h^{\hat{\alpha}}_A$ para que el sistema sea fuertemente hiperbólico (capítulo 4) y por lo tanto bien puesto. En el caso cuasi-lineal solo mostraremos condiciones necesarias, en particular, una condición clave, ver eq. (3.18) en el capítulo 3, que permite descartar sistemas no hiperbolizables.

Para cerrar esta sección, hacemos un comentario sobre la notación. Debido a que $\dim \hat{\alpha} = \dim \alpha$, de ahora en adelante identificaremos sus correspondientes espacios vectoriales (aunque no necesariamente exista una identificación natural), por lo que escribiremos a las reducciones como h^α_A , suprimiendo el sombrero del índice α .

2.2. Vínculos de Geroch

Supongamos que existe un tensor C^q_A en $\kappa \in b$, tal que en κ

$$C^{(q)}_A \mathfrak{N}^{[A|a]}_\alpha = 0 \quad (2.9)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.5) por $n_q C^q_A$ obtenemos

$$n_q C^q_A \mathfrak{N}^{Aa}_\gamma m^b_a \partial_b \phi^\gamma = n_q C^q_A J^A, \quad (2.10)$$

el termino $n_q C^q_A \mathfrak{N}^{Aa}_\gamma n_a$ se anula por (2.9). La ecuación resultante no tiene derivadas en la dirección de n_q , es decir, derivadas temporales ∂_t . Solamente aparecen derivadas ∂_i con $i = 1, \dots, n$ sobre las hipersuperficies Σ_t , es decir, esta ecuación solo involucra los valores de ϕ^α sobre Σ_t . Por este motivo llamamos a este tipo de ecuaciones (2.10), ecuaciones de vínculo.

Notemos que C^q_A es independiente de la normal n_a , ya que se define por la ecuación (2.9). De este modo, la expresión (2.10), es una expresión sobre cualquier hipersuperficie con normal n_a .

Es importante resaltar que estos tensores $C^q_{\Gamma A}$ forman un espacio vectorial, en cada punto κ , donde ahora agregamos el índice Γ para denotar los diferentes elementos de alguna base de este espacio.

Por ultimo decimos que los vínculos están completos, si para cada $\kappa \in b$ y cada n_a no nulo en $\pi(\kappa) \in M$ se cumple que

$$e = u + c$$

donde $c = \dim \Gamma$.

Combinando las ecuaciones (2.7) y las (2.10), esta condición de completitud dice que el número de ecuaciones del sistema es tal que para cada ϕ^γ tenemos una ecuación de evolución (estas pueden estar acopladas) y el resto de las ecuaciones son vínculos diferenciales.

El procedimiento que elegimos para resolver el sistema (2.1) es: elegir un dato inicial $\phi^\alpha| = \phi^\alpha_0$ que cumpla las ecuaciones de vínculos (2.11) para todo Γ en la hipersuperficie

Σ_0 ,

$$n_q C_{\Gamma A}^q \mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} m_a^b \nabla_b \phi_0^{\gamma} = n_q C_{\Gamma A}^q J^A, \quad (2.11)$$

y utilizar las ecuaciones de evolución (2.7) (numéricamente o analíticamente) para obtener los valores de ϕ^{α} en las hipersuperficies Σ_t para $0 < t \leq T$ hasta algún tiempo T . Por último, chequear que en cada hipersuperficie Σ_t se siguen cumpliendo los vínculos (2.11). Para este último punto existen métodos analíticos como veremos en el capítulo 6, aunque numéricamente suele ser un problema difícil de tratar.

Ejemplo: Vínculos diferenciales en las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} n_q C_{1A}^q &= n_q (g^{cq}, 0) \\ n_q C_{2A}^q &= n_q (0, \varepsilon^{bcfq}) \end{aligned}$$

Contrayendo con (2.4) y simetrizando en el índice q y a obtenemos

$$\begin{aligned} C_{1A}^{(q)} \mathfrak{N}_{\gamma}^{[A|a]} &= (g^{c(q)}, 0) \begin{pmatrix} g^{a[d} \delta_c^{e]} \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (g^{a[d} g^{e]q} + g^{q[d} g^{e]a}) = 0 \\ C_{2A}^{(q)} \mathfrak{N}_{\gamma}^{[A|a]} &= (0, \varepsilon^{bcf(q)}) \begin{pmatrix} g^{a[d} \delta_c^{e]} \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{pmatrix} = \varepsilon^{de(aq)} = 0 \end{aligned}$$

Entonces, los vínculos de las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned} n_q C_{1A}^q \mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} m_a^b \nabla_b \phi^{\gamma} &= n_q (g^{qc}, 0) \begin{pmatrix} g^{ad} \delta_c^e \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{pmatrix} \nabla_a F_{de} \\ &= n^e \nabla_a F_{de} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_q C_{2A}^q \mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} m_a^b \nabla_b \phi^{\gamma} &= n_q (0, \varepsilon^{bcfq}) \begin{pmatrix} g^{ad} \delta_c^e \\ \delta_{[f}^a \delta_b^d \delta_c^e \end{pmatrix} \nabla_a F_{de} \\ &= n_q \varepsilon^{adeq} \nabla_a F_{de} = 0 \end{aligned}$$

escribiendo F_{ab} en términos de los campos eléctricos y magnéticos y con métrica plana, estas expresiones resultan en

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Es posible mostrar que si las ecuaciones de evolución para E y B son (2.8), y elegimos un dato inicial cumpliendo las ecuaciones de vínculos (2.12), estas se cumplirán durante la evolución.

Notemos que en principio podemos sumar términos de vínculos a las ecuaciones de evolución obtenidas anteriormente, sin cambiar las soluciones, ya que si los vínculos se conservan el sistema es el mismo. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \partial_t B &= -\nabla \times E + \chi_1 \nabla \cdot E + \chi_2 \nabla \cdot B \\ \partial_t E &= \nabla \times B + \chi_3 \nabla \cdot E + \chi_4 \nabla \cdot B \end{aligned}$$

Donde χ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ son coeficientes a elegir. Estas ecuaciones pueden obtenerse simplemente tomando una reducción diferente $h_{2A}^\alpha(\chi_i)$, sin embargo, malas elecciones de los coeficientes χ_i podría significar reducciones no fuertemente hiperbólicas. Y por lo tanto que el conjunto de ecuaciones de vínculos dejen de cumplirse durante la evolución.

2.3. Sistemas de coeficientes constantes sin vínculos.

Para el desarrollo de esta sección seguimos los trabajos [6, 7, 9]. Consideramos el sistema simplificado

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \partial_a \phi^\gamma + \mathfrak{B}_\gamma^A \phi^\gamma = 0 \quad (2.13)$$

tal que \mathfrak{N}_γ^{Aa} y \mathfrak{B}_γ^A son constantes. Notemos que en este caso, $e = \dim A = \dim \alpha = u$ por lo tanto tenemos el mismo número de ecuaciones que de campos. Utilizando n_a y m_a^b podemos realizar la misma descomposición que antes

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a \partial_t \phi^\gamma + \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} m_a^b \partial_b \phi^\gamma + \mathfrak{B}_\gamma^A \phi^\gamma = 0. \quad (2.14)$$

Otra vez $m_a^b \partial_b$ son las derivadas espaciales, es decir, derivadas sobre Σ_t , por lo que reemplazamos $m_a^b \partial_b \rightarrow \partial_i$ con $i = 1, \dots, n$. Si además multiplicamos por la inversa de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ (elegimos n_a para que $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ tenga inversa), que llamamos $\left((\mathfrak{N}n)^{-1}\right)_A^\alpha$ y definimos

$$A_\gamma^{\alpha a} := \left((\mathfrak{N}n)^{-1}\right)_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \quad (2.15)$$

$$B_\gamma^\alpha := \left((\mathfrak{N}n)^{-1}\right)_A^\alpha \mathfrak{B}_\gamma^A \quad (2.16)$$

obtenemos el sistema de evolución para los campos ϕ^α

$$\partial_t \phi^\alpha + A_\gamma^{\alpha i} \partial_i \phi^\gamma + B_\gamma^\alpha \phi^\gamma = 0. \quad (2.17)$$

Que esperamos resolver con dato inicial

$$\phi^\alpha|_{\Sigma_{t=0}} = f^\alpha(x^i) \quad (2.18)$$

con f^α campos en L_2 ⁴.

Tomando transformada de Fourier de (2.17) en x^i obtenemos su forma pseudo-diferencial

$$\partial_t \hat{\phi}^\alpha + i A_\gamma^{\alpha i} k_i \hat{\phi}^\gamma + B_\gamma^\alpha \hat{\phi}^\gamma = 0. \quad (2.19)$$

Llamamos “*parte principal de las ecuaciones de evolución*” al termino $A_\gamma^{\alpha i} k_i$.

Podemos escribir el dato inicial en términos de su transformada de Fourier

$$f^\alpha(x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Sigma_0} e^{ik_i x^i} \hat{f}^\alpha(k_i) d^n k$$

⁴Diremos que un campo f^α esta en $L_2(\Sigma)$ si $\|f\|_G^2 = \int_\Sigma \overline{f^\alpha(x^i)} G_{\alpha\beta} f^\beta(x^i) d^n x < \infty$ donde la barra significa conjugar y $G_{\alpha\beta}$ es una forma Hermitica ($G_{\alpha\beta} = \overline{G_{\beta\alpha}}$), definida positiva sobre Σ que no depende de x^i .

por lo que la única solución en L_2 de (2.19) es (ver [6] o [9])

$$\hat{\phi}^\alpha(t, k_i) = e^{-i(A_\gamma^{\alpha i} k_i + B_\gamma^\alpha)t} \hat{f}^\gamma(k_i) \quad (2.20)$$

y de (2.17) es

$$\phi^\alpha(t, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Sigma_0} e^{ik_i x^i} e^{-i(A_\gamma^{\alpha i} k_i + B_\gamma^\alpha)t} \hat{f}^\gamma(k_i) d^n k \quad (2.21)$$

Definición 1 Decimos que el sistema (2.17) es bien puesto en L_2 y estable ante términos de menor orden en las derivadas (es decir, para cualquier matriz B_γ^α), si existe una vecindad de Σ_0 , tal que el sistema tiene solución en L_2 , esta es única y continua en el dato inicial;

Esto es equivalente⁵ a que existan constantes C y κ tal que

$$\|\phi^\alpha(t, \cdot)\|_2 \leq C e^{\kappa t} \|f^\alpha\|_2 \quad (2.22)$$

donde C y κ son independientes de f^α .

Mostramos un par de ejemplos que nos permiten entender esta definición.

Ejemplo 1: Consideramos el sistema

$$\partial_t \phi = \partial_x \phi$$

con $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y dato inicial $\phi(t=0, x) = f(x) \in L_2$. Tomando la transformada de Fourier en x , obtenemos

$$\partial_t \hat{\phi} = ik \hat{\phi}$$

(en este caso $A_\gamma^{\alpha i} k_i \rightarrow -k$) cuya solución es (ver 2.20)

$$\hat{\phi}(t, k) = e^{ikt} \hat{f}(k).$$

Usando la identidad de Parseval⁶ vemos que el sistema es bien puesto,

$$\|\phi(t, \cdot)\|_2 = \|e^{ik(t)} \hat{f}(k)\|_2 = |e^{ikt}| \|\hat{f}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

ya que con $C = 1$ y $\kappa = 0$ cumplen la ecuación (2.22). Notemos que estos coeficientes son independientes de la frecuencia del dato inicial.

Ejemplo 2: Consideramos el sistema

$$\partial_t \phi = -i \partial_x \phi$$

Igual que antes $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi(t=0, x) = f(x) \in L_2$. Este ejemplo es mal puesto, como se muestra a continuación.

⁵Para la demostración de la equivalencia, ver [6].

⁶ $\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi^\alpha(t, x^i) G_{\alpha\beta} \psi^\beta(t, x^i) d^n x = \int \hat{\phi}^\alpha(t, k_i) G_{\alpha\beta} \hat{\psi}^\beta(t, k_i) d^n k = \langle \hat{\phi}, \hat{\psi} \rangle.$

La solución del mismo en Fourier es

$$\hat{\phi}(t, k) = e^{kt} \hat{f}(k)$$

(con $A_\gamma^{\alpha i} k_i \rightarrow ik$). Supongamos que las frecuencias en $f(x)$ están acotadas, es decir, existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\hat{f}(k) = 0$ para todo $k \geq \kappa$. Entonces $|e^{kt}| \leq e^{\kappa t}$ y por lo tanto $\|\phi(t, \cdot)\|_2 \leq e^{\kappa t} \|f\|_2$. Sin embargo, esta desigualdad no puede obtenerse con κ independiente de las frecuencias, para datos iniciales arbitrarios. En particular, si perturbamos el dato inicial con amplitudes pequeñas pero con frecuencias cada vez mas altas, la solución no puede ser acotada como en (2.22).

Este ejemplo muestra que el efecto de que un conjunto de ecuaciones diferenciales sea bien puesto o no, se manifiesta para altas frecuencias, ya que para bajas frecuencias siempre podemos encontrar las cotas necesarias.

Ejemplo 3: Consideramos el sistema

$$\partial_t \phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x \phi$$

donde $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ tal que $\phi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$. Debido a que

$$\begin{aligned} |\exp \{-i(A_\gamma^{\alpha i} k_i) t\}| &\rightarrow \left| \exp \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} kt \right\} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 & ik \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \approx (1 + |k| t), \end{aligned}$$

no pueden existir C y κ , independientes de k , tal que $(1 + |k| t) \leq Ce^{\kappa t}$. Esto prueba que el sistema no es bien puesto. Como veremos a continuación, el problema del mismo es que $A_\gamma^\alpha(k)$ no es diagonalizable.

Por otro lado, debido a que las ecuaciones para ϕ_1 y ϕ_2 esta desacopladas, este sistema podría resolverse primero para ϕ_2 ; y después para ϕ_1 , usando la solución explicita de ϕ_2 como fuente. De este modo podríamos encontrar las cotas requeridas para ϕ_1 y ϕ_2 por separado. El problema de este mecanismo es que estamos buscando sistemas estables ante termino de menores ordenes en las derivadas. Por ejemplo, si la ecuación original es cambiada por $\partial_t \phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x \phi + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi$ el sistema deja de estar desacoplado y no se puede encontrar una cota como (2.22). Por lo que mismo no es bien puesto.

Retomamos la teoría. Usando la solución explícita (2.21), la desigualdad entre normas de matrices y vectores $|Q\phi| < |Q| |u|$ y la identidad de Parseval concluimos que para que (2.22) sea cierto, tiene que suceder que:

$$\left| e^{-i(A_\gamma^{\alpha i} k_i + B_\gamma^\alpha) t} \right| \leq Ce^{\kappa t}$$

para todo $t > 0$. Notemos que si consideramos $t \rightarrow \frac{t}{|k|}$ y tomamos $|k| \rightarrow \infty$, esto nos lleva a la expresión

$$\left| e^{-i(A_\gamma^{\alpha i} \hat{k}_i)t} \right| \leq C \quad (2.23)$$

donde \hat{k}_i es tal que $|\hat{k}| = 1$. Si esta condición es cierta, es posible probar (ver [9]) que

$$\left| e^{-i(A_\gamma^{\alpha i} k_i + B_\gamma^\alpha)t} \right| \leq C e^{C|B|t} \quad \forall k \in \mathbb{R}^n \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

Por lo que concluimos que el sistema es bien puesto si y solo si se cumple la ecuación (2.23), que resulta en una condición sobre la parte principal de las ecuaciones de evolución, donde B_γ^α no juega ningún papel. Antes de presentar condiciones necesarias y suficientes que garanticen la ecuación (2.23) vamos a introducir la definición de hiperbolicidad.

Definición 2 El sistema (2.13) se dice hiperbólico si existe n_a tal que

- 1- $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ no tiene kernel.
- 2- Todos los autovalores de $A_\gamma^{\alpha i} k_i$ son reales, para todo $|k_i| = 1$.

Cuando el sistema es hiperbólico, las velocidades de propagación de la teoría son reales y no se esperan crecimientos exponenciales en términos de las frecuencias, sin embargo si son posibles crecimientos polinomiales. Esto no alcanza para garantizar que la teoría sea bien puesta, ni estable, sin embargo es una condición necesaria. Es por ello que usando el teorema de matrices de Kreiss [19] y el trabajo de Strang [20], introducimos la definición de hiperbolicidad fuerte, estableciendo una serie de condiciones equivalentes. De todas estas, la condición 4 es exactamente la eq. (2.23), por lo que si el sistema es fuertemente hiperbólico es bien puesto.

Definición 3 El sistema (2.13) es fuertemente hiperbólico si alguna de las siguientes cuatro condiciones equivalentes se cumple:

- 1- Sistema (2.13) es hiperbólico en alguna dirección n_a y $A_\gamma^{\alpha i} \hat{k}_i$ ⁷ es uniformemente diagonalizable: esto significa que para todo \hat{k}_i existe $S_\rho^\alpha(\hat{k})$ y $C > 0$ tal que $A_\gamma^{\alpha a} \hat{k}_a = S_\rho^\alpha(\hat{k}) \Lambda_\tau^\rho(\hat{k}) (S^{-1})_\gamma^\tau(\hat{k})$ con $\Lambda_\tau^\rho(\hat{k})$ diagonal y tal que $|S(\hat{k})| |S^{-1}(\hat{k})| \leq C$.
- 2- Para todo k_i y todo $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Im } s > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| (A_\gamma^{\alpha a} k_a - s \delta_\gamma^\alpha)^{-1} \right| \leq \frac{C}{\text{Im } s} \quad (2.24)$$

- 3- Para todo \hat{k}_i , existe una forma Hermitiana $H(\hat{k})_{\alpha\beta}$ y una constante $C > 0$ tal que

- i) $H(\hat{k})_{\eta\alpha} A_\gamma^{\alpha i} \hat{k}_i$ es una forma Hermítica, es decir, $H(\hat{k})_{\eta\alpha} A_\gamma^{\alpha i} \hat{k}_i = H(\hat{k})_{\gamma\alpha} \overline{A_\eta^{\alpha i} \hat{k}_i}$
- ii) $\frac{1}{C} H_{\delta\gamma}^0 \geq H(\hat{k})_{\alpha\delta} \geq C H_{\delta\gamma}^0 > 0 \quad \forall k_a$,

donde $H_{\delta\gamma}^0$ es una forma Hermítica que no depende de \hat{k} .

- 4- Para todo \hat{k}_i y $t \geq 0$ existe $C > 0$ tal que $\left| e^{-i(A_\gamma^{\alpha a} \hat{k}_a)t} \right| \leq C$.

⁷ Usamos el sombrero \hat{k}_i para denotar que $|\hat{k}_i| = 1$. Esta notación sera usada a lo largo de todo el trabajo, salvo que se mencione lo contrario.

Cuando $A_{\gamma}^{\alpha i} \hat{k}_i$ es real, la Hermiticidad debe ser entendida como simetricidad.

Es importante mencionar que el simetrizador $H(\hat{k})_{\alpha\eta}$, de la condición 3, se construye usando los autoespacios de $A_{\gamma}^{\alpha i} \hat{k}_i$, es decir, la matriz $S_{\rho}^{\alpha}(\hat{k})$. Su forma explícita es $H(\hat{k})_{\alpha\eta} = \left(\overline{S^{-1}}\right)_{\alpha}^{\beta} G_{\beta\gamma} (S^{-1})_{\eta}^{\gamma}$ donde $G_{\beta\gamma}$ es una forma Hermitiana definida positiva, tal que $G_{\beta\gamma} \Lambda_{\tau}^{\gamma}$ también es una forma Hermitiana. Con esta elección de $H(\hat{k})_{\alpha\eta}$ puede probarse fácilmente que la condición *i*) en 3, se cumple, sin embargo, debe elegirse $G_{\beta\gamma}$ convenientemente para cumplir *ii*).

A partir de ahora, llamaremos “*débilmente hiperbólicos*” a los sistemas hiperbólicos pero no fuertemente hiperbólicos.

Dentro de la clase de sistemas fuertemente hiperbólicos, se encuentran los simétricos hiperbólicos.

Definición 4 Decimos que el sistema (2.13) es *simétrico hiperbólico* si se cumple la condición 3 y tal que $H_{\alpha\beta}$ no depende de \hat{k} .

En el caso que el sistema (2.13) tiene una fuente $J^A(t, x) \in \mathbb{C}^{\infty}$ acotada y con derivadas acotadas, las definiciones anteriores no cambian.

2.4. Sistemas de coeficientes constantes con vínculos.

Consideramos ahora un sistema del tipo (2.1), es decir, con vínculos, pero mucho mas simplificado,

$$\mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} \partial_a \phi^{\gamma} = 0 \quad (2.25)$$

con $\mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa}$ constante y tal que $e \geq u$. Ya hemos visto en la sección anterior que para decidir la hiperbolicidad fuerte del sistema solo es relevante el símbolo principal, donde los términos de menor orden no tienen ninguna injerencia, es por esto que ahora no los agregamos.

En su versión en 3+1 esta ecuaciones pueden escribirse como (2.14)

$$\mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} n_a \partial_t \phi^{\gamma} + \mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} m_a^b \partial_b \phi^{\gamma} = 0$$

Tomando una transformada de Fourier en las coordenadas x^i obtenemos

$$\mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} n_a \partial_t \hat{\phi}^{\gamma} + i \mathfrak{N}_{\gamma}^{Aa} k_a \hat{\phi}^{\gamma} = 0 \quad (2.26)$$

donde $k_a t^a = 0$ (o $m_a^b k_b = k_a$)⁸.

Elegimos un dato inicial $\phi^{\alpha}|_{\Sigma_0} = f^{\alpha} \in L_2(\Sigma_0)$ tal que $k \cdot t = 0$, que en su versión en Fourier es $\hat{\phi}^{\alpha}|_{\Sigma_0} = \hat{f}^{\alpha}(k)$. Ya que la frecuencia en el dato inicial es arbitraria, buscamos soluciones de (2.26) para toda frecuencia k_a sin proyección en la dirección de n_a .

⁸Es por esto que $k_a \rightarrow k_i$ con $i = 1, \dots, n$.

Consideramos una reducción $h_A^\alpha(n, \hat{k})$ tal que $h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a$ es invertible (con inversa $((h\mathfrak{N})^{-1})_\beta^\alpha$) y definimos las ecuaciones de evolución del sistema como

$$h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a \partial_t \hat{\phi}^\gamma + i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a \hat{\phi}^\gamma = 0 \quad (2.27)$$

o lo que es lo mismo

$$\partial_t \hat{\phi}^\alpha = -i \left((h\mathfrak{N})^{-1} \right)_\beta^\alpha h_A^\beta \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a \hat{\phi}^\gamma$$

Este sistema es análogo al sistema (2.19) con $\mathfrak{N}_\gamma^{\alpha a}$ reemplazado por $h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa}$ y no tiene vínculos. En este caso

$$A_\beta^{\alpha a} k_a := \left((h\mathfrak{N})^{-1} \right)_\gamma^\alpha h_A^\gamma \mathfrak{N}_\beta^{Aa} k_a. \quad (2.28)$$

Dado que estamos en la forma (2.19), damos lo siguiente definición de hiperbolicidad fuerte, para sistemas con vínculos.

Definición 5 Decimos que el sistema (2.25) es fuertemente hiperbólico si existe n_a y $h_A^\alpha(n, \hat{k})$ tal que $A_\beta^{\alpha a} k_a$ (definido en (2.28)) cumple cualquiera de las condiciones equivalentes de la definición 3.

Debemos mencionar que en esta definición, la reducción $h_A^\alpha(n, \hat{k})$ puede depender explícitamente de \hat{k} , cuando esto sucede decimos que la reducción es pseudo-diferencial. En el caso de coeficientes constantes, la transformada de Fourier toma la forma simple (2.26) y por lo tanto las ecuaciones de evolución de los campos (2.27) tienen sentido pseudo-diferencial. Esto no genera ningún conflicto a la hora de interpretar y resolver el sistema reducido. Por otro lado, en el caso cuasi-lineal la transformada de Fourier es mas compleja (ya que aparecen convoluciones), por lo cual no es claro cuales son las ecuaciones de evolución si h_A^α es pseudo-diferencial. En estos casos creemos que podemos encontrar normas de energía pseudo-diferenciales de forma tal de obtener los estimados necesarios (ver [9, 21, 22]). Ver como extrapolar los resultados de esta tesis a esta clase de casos es una linea de trabajo que esperamos afrontar en algún momento.

2.5. Sistemas cuasi-lineales.

Siguiendo los trabajos [9] y [4] introducimos la definición de fuertemente hiperbólico y simétrico hiperbólico en el caso cuasi-lineal. Previamente comentaremos sobre un caso intermedio, el de coeficientes variables.

Consideremos las ecuaciones (2.13)⁹ con $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(t, x^i)$, $\mathfrak{B}_\gamma^A(t, x^i)$ dependientes de las coordenadas y sin vínculos ($e = u$). Este caso es llamado el de *coeficientes variables*. Como explicamos antes, que el sistema sea bien puesto, es una propiedad que puede

⁹También se puede incluir una fuente $J^A(t, x^i)$ al sistema.

chequearse mirando soluciones de altas frecuencias (o longitud de ondas cortas). De este modo, asumiendo algunas condiciones de suavidad en $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(t, x^i)$, $\mathfrak{B}_\gamma^A(t, x^i)$, los mismos pueden ser considerados constantes (por entornos), para esas soluciones de altas frecuencias. Es decir, se aproxima el sistema de coeficientes variables con sistemas de coeficientes constantes, evaluando \mathfrak{N}_γ^{Aa} y \mathfrak{B}_γ^A en puntos (t_0, x_0^i) de M . Esto es llamado el *congelamiento de coeficientes*. Entonces, si todos los casos congelados son fuertemente hiperbólicos, el sistema de coeficientes variables es fuertemente hiperbólico. Donde ahora fuertemente hiperbólico es definido usando la condición 3 de la definición 3 y además son requeridas ciertas cotas y condiciones de suavidad en el simetrizador $H_{\alpha\beta}(t, x^i, k)$ y en $A_\beta^\alpha(k, t, x^i)$, que no mencionaremos.

En el caso cuasi-lineal, ecuación (2.29), con $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi)$ y $J^A(x, \phi)$, también cumpliendo algunas condiciones de suavidad y de cotas. Linealizamos el problema al rededor de una solución ϕ_0 y aplicamos la condición de hiperbolicidad fuerte del caso de coeficientes variables. Entonces el sistema es bien puesto en ϕ_0 si los sistemas linealizados son fuertemente hiperbólicos.

Explícitamente, consideremos el sistema cuasi-lineal, con $e \geq u$,

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi) \partial_a \phi^\gamma = J^A(x, \phi) \quad (2.29)$$

donde los términos de menor orden en derivadas han sido absorbidos en J^A . Análogamente a (2.5), en su forma en 3+1 esta ecuación es

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a \partial_t \phi^\gamma + \mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi) m_a^b \partial_b \phi^\gamma = J^A(x, \phi) \quad \text{con } 0 \leq t \leq T \text{ y } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

con $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi)$, $J^A(x, \phi) \in C^m$, donde C^m es la clase de funciones \mathbb{C}^∞ , acotadas y con derivadas acotadas, en todos sus argumentos¹⁰. Donde T es alguna constante tal que podemos encontrar soluciones suaves de la ecuación entre $0 \leq t \leq T$, es decir, consideramos tiempos finitos. Y con algún dato inicial $f^\alpha \in \mathbb{C}^\infty$, con soporte compacto, para $t = 0$.

Como mencionamos antes, linealizamos las ecuaciones alrededor de una solución ϕ_0^γ , obteniendo el sistema

$$\mathfrak{N}_\gamma^{A0}(x, \phi_0) \partial_t \varphi^\gamma + \mathfrak{N}_\gamma^{Ai}(x, \phi_0) \partial_i \varphi^\gamma + \mathfrak{B}_\gamma^\eta(x, \phi_0) \varphi^\gamma = 0.$$

La forma explicita de $\mathfrak{B}_\gamma^\eta(x, \phi_0)$ no es importante en este punto (ver [9]). Por lo que definimos fuertemente hiperbólico, como sigue.

Definición 6 Decimos que el sistema (2.30) es fuertemente hiperbólico en $\phi_0 \in \mathbb{C}^\infty$, si existe n_a , $h_A^\alpha(x, \phi_0, n_a)$ y $H_{\alpha\beta}(t, x, \phi_0, \hat{k}) \in C^m$ una forma Hermitiana tal que, si $A_\beta^{\alpha a}(t, x, \phi_0, n_a) k_a \in C^m$ es definida como en (2.28), se cumplen las siguientes condiciones para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ y $|\hat{k}| = 1$:

$$1 - H_{\alpha\eta} A_\gamma^{\alpha a} \hat{k}_a \text{ es una forma Hermitica}$$

¹⁰Para una definición mas precisa, ver [6].

$$2^{-\frac{1}{C}} H_{\delta\gamma}^0 \geq H_{\alpha\delta} \geq C H_{\delta\gamma}^0 > 0$$

donde $H_{\delta\gamma}^0$ es una forma Hermítica que no depende de (t, x, \hat{k}) .

En principio esta definición es muy parecida a la condición 3 de la definición (3), la gran diferencia es que se requiere que $H_{\alpha\beta}$ sea infinitamente diferenciable, acotada y con derivadas acotadas.

Por otro lado, si $H_{\alpha\delta}$ no depende de \hat{k} , el sistema es llamado *simétrico hiperbólico*. Sin embargo presentamos esta definición en el mismo modo que Geroch lo hace en [4], donde se asume que las condiciones de suavidad y cotas se satisfacen, por lo que no son mencionadas en la definición.

Definición 7 El sistema (2.1) se dice *simétrico hiperbólico* en $\phi_0 \in \mathbb{C}^\infty$, si existe n_a y $h_{\alpha A}(x, \phi_0)$ tal que

- 1- para todo $l_a \in T^*M$ se cumple que $h_{\alpha A} \mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a$ es Hermitiana en $\alpha\beta$
- 2- $h_{\alpha A} \mathfrak{N}_\beta^{Aa} n_a$ es definida positiva.

Notemos que $h_{\alpha A}$, con el índice α abajo, es exactamente

$$h_{\alpha A} = H_{\rho\alpha} \left((h\mathfrak{N}n)^{-1} \right)_\gamma^\alpha h^\gamma_A$$

Un estudio detallado de los casos cuasi-lineales puede verse en [23].

2.6. Modos y velocidades características.

Guiados por la idea de que las altas frecuencias controlan cuando la teoría es bien puesta. En esta sección consideramos el sistema cuasi-lineal (2.30) y perturbamos una solución de fondo, tal que esa perturbación es de baja amplitud y alta frecuencia. El resultado de este proceso es la ecuación de la Eikonal, que nos permite definir la estructura característica del sistema y nos indica las velocidades de propagación máximas posibles de una teoría.

Consideramos una solución ϕ_0^β de la ecuación (2.30) y con una perturbación en forma de onda plana, de pequeña amplitud y alta frecuencia

$$\phi^\beta = \phi_0^\beta + \varepsilon \delta \phi^\beta e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}}. \quad (2.31)$$

El efecto de pequeña amplitud y alta frecuencia viene dado tomando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Desarrollando en serie de Taylor a primer orden en ε

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi, x) &= \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) + \frac{\partial \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x)}{\partial \phi^\gamma} \varepsilon \delta \phi^\gamma e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^2) \\ \partial_a \left(\phi_0^\beta + \varepsilon \delta \phi^\beta e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} \right) &= \left(\partial_a \phi_0^\beta + \varepsilon e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} \partial_a \delta \phi^\beta + i \delta \phi^\beta e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} \partial_a S(x^a) \right) \\ J^A(\phi, x) &= J^A(\phi_0, x) + \varepsilon \frac{\partial J^A(\phi_0, x)}{\partial \phi^\beta} \delta \phi^\beta e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi, x) \partial_a \phi^\beta - J^A(\phi, x) \\
&= \left(\mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) \partial_a \phi_0^\beta - J^A(\phi_0, x) + i \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) \delta \phi^\beta e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} \partial_a S(x) \right) \\
&+ \varepsilon \left(\mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) \partial_a \delta \phi^\beta + i \frac{\partial \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x)}{\partial \phi^\gamma} \delta \phi^\gamma \delta \phi^\beta e^{i \frac{S}{\varepsilon}} \partial_a S - \frac{\partial J^A(\phi_0, x)}{\partial \phi^\beta} \delta \phi^\beta \right) e^{i \frac{S(x^a)}{\varepsilon}} \\
&+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x)}{\partial \phi^\gamma} \delta \phi^\gamma \partial_a \delta \phi^\beta e^{i \frac{2S(x)}{\varepsilon}} \right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Usando que ϕ_0 es solución del sistema original y tomando el limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos la llamada ecuación de la Eikonal para sistemas con vínculos

$$0 = \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) l_a \delta \phi^\beta, \quad (2.32)$$

donde $l_a := \partial_a S(x)$. Si elegimos $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a$ con $k_a t^a = 0$, esta ecuación es

$$(-\lambda \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) n_a + \mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) k_a) \delta \phi^\beta = 0 \quad (2.33)$$

Notemos que estamos usando n_a y k_a , la misma notación que en el caso de coeficientes constantes, esto es así ya que en ese caso, la perturbación (2.31) es una solución exacta del sistema (2.27).

Llamamos a las soluciones $\lambda_i(k)$ de (2.33), *velocidades características del sistema general o autovalores generalizados*; a los co-vectores solución $l(\lambda_i(k))_a$ *co-vectores característicos*; y a las soluciones $\delta \phi^\beta$ *modos característicos del sistema general o kernel por derecha de $\mathfrak{N}_\beta^{Aa}(\phi_0, x) l_a$* .

Asumamos que existe una hiperbolización h_A^α , si contraemos (2.33) con $\left((\mathfrak{N}n)^{-1} \right)_\alpha^\gamma h_A^\alpha$ obtenemos

$$(-\lambda \delta_\beta^\alpha + A_\beta^{\alpha a} k_a) \delta \phi^\beta = 0. \quad (2.34)$$

De donde concluimos que las soluciones $\tau_i(k)$, de esta ecuación de la Eikonal reducida, son autovalores de $A_\beta^{\alpha a} k_a$ y $\delta \phi^\beta$ autovectores. Las llamamos *velocidades características de las ecuaciones de evolución y modos de propagación de las ecuaciones de evolución* respectivamente. Es facil ver que $\{\lambda_i(k)\}$ es un subconjunto de $\{\tau_i(k)\}$, es decir, al reducir el sistema agregamos mas velocidades de propagación. Además, por condiciones de hiperbolicidad los $\tau_i(k)$ son reales, por lo que los $\lambda_i(k)$ deben serlo también. Lo mismo sucede con los modos de propagación, los generales están incluidos en los de evolución. Es posible probar que la máxima velocidad de propagación de las soluciones viene dada por el autovalor mas grande del conjunto $\{\tau_i(k)\}$ (ver [9, 24]). Por lo que es claro como las reducciones pueden introducir velocidades de propagación mayores que las físicamente relevantes. Estas, en principio, deberán estar asociadas a propagaciones de los vínculos. De este modo, si ellos se mantiene satisfechos durante la evolución, esas velocidades propagan amplitudes nulas, por lo tanto la velocidades de los grados de libertad físicos vienen dadas por los $\lambda_i(k)$.

Notemos que cuando el sistema es fuertemente hiperbólico tenemos en cada punto $x \in M$ una base completa de modos característicos del espacio vectorial Φ_R para cada dirección \hat{k}_a . Por lo que toda solución puede escribirse punto a punto como una combinación de ondas planas.

Gran parte de toda esta tesis es el estudio de la ecuación (2.33), es decir, entender su estructura para así poder elegir reducciones específicas.

Capítulo 3

Condición necesaria para Hiperbolicidad Fuerte.

3.1. Introducción.

Este capítulo esta basado en nuestro trabajo [2], donde se muestra una condición necesaria para que un sistema cuasi-lineal (ver sección 2.5)

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi) \partial_a \phi^\gamma = J^A(x, \phi), \quad (3.1)$$

con $e \geq u$, tenga una reducción fuertemente hiperbólica. Para ello usamos la descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en ingles) de $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a$ (ver apéndice A) en una vecindad de co-vectores característicos y concluimos que la forma en la que esos valores singulares tienden, cuando nos acercamos a los covectores característicos, permite detectar cuando no existe ningún hiperbolizador h_A^α del sistema. Es decir, permite detectar sistemas débilmente hiperbólicos o mal puestos. En el apéndice A describimos la teoría SVD en detalle. Incluimos este apéndice ya que nuestro enfoque es un poco diferente al estándar, encontrado en la literatura.

Introducimos notación y un par de definiciones que son pertinentes en este capítulo y en los que siguen.

En cada punto del fibrado el símbolo principal es un mapeo entre los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a : \Phi_R &\longrightarrow \Psi_L \\ \delta \phi^\beta &\longrightarrow (\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a) \delta \phi^\beta \end{aligned}$$

de campos y de ecuaciones. Para poder definir su descomposición en valores singulares, necesitamos dotar con productos internos a cada uno de estos espacios. Por lo que llamamos $G_{2\alpha\beta}$ y G_{1AB} a los mismos ¹ en Φ_R y Ψ_L respectivamente.

Por otro lado, consideremos el conjunto de planos $S_{n_a}^\mathbb{C} = \{l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a\}$ para todo k_a tal que $k_a t^a = 0$, con $|k| = 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

¹Formas Hermitianas definidas positivas.

Mas específicamente nos concentraremos en vecindades de líneas reales de esos planos. Esas líneas reales pertenecen a S_{n_a} y son las mismas líneas que en $S_{n_a}^{\mathbb{C}}$ pero con $\lambda \in \mathbb{R}$. La condición $k_a t^a = 0$ dice que k_a y n_a no son proporcionales, lo que implica que esas líneas y planos no pasan por el origen para ningún λ . Cada plano depende de algún k_a , pero nosotros los llamamos genéricamente $l(\lambda)_a$ para no complicar la notación.

Además, llamamos kernel por derecha al subespacio de vectores $\delta\phi^\gamma$ tal que $(\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a) \delta\phi^\beta = 0$ y kernel por izquierda a el subespacio de co-vectores X_A tal que $X_A (\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l_a) = 0$ ².

Siguiendo los lineamiento del capítulo 2 definimos.

Definición 8 *El sistema (2.29) es llamado hiperbólico si existe n_a tal que*

- 1- $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} n_a$ no tiene kernel por derecha.
- 2- Para cada plano $l(\lambda)_a \in S_{n_a}^{\mathbb{C}}$, si $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l(\lambda)_a$ tiene kernel por derecha no trivial entonces λ es real.

La condición 1 es necesaria para que pueda existir h_A^α tal que $h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{Aa} n_a$ sea invertible. Y también implica que la dimensión del kernel por izquierda de $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} n_a$ es $c = e - u$, igual al número de vínculos.

La condición 2 es necesaria, ya que como explicamos en la sección 2.6, los autovalores generalizados $\lambda_i(\hat{k})$, soluciones de la ecuación de la Eikonal (2.33), son un subconjunto de los autovalores de $A_\gamma^{\alpha a} \hat{k}_a$, que por la condición de hiperbolicidad del sistema reducido tienen que ser reales.

3.2. Resultados.

Como veremos mas adelante en este capítulo (ver Lema 13), $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l(\lambda)_a$ tiene kernel por derecha cuando al menos uno de sus valores singulares se anula. Esto sucede cuando

Lema 9 *Consideramos $l(\lambda)_a \in S_{n_a}^{\mathbb{C}}$, y $G_{2\alpha\beta}$, G_{1AB} cualquier par de productos internos en Φ_R y Ψ_L respectivamente, entonces el símbolo principal $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l(\lambda)_a$ tiene kernel por derecha si y solo si*

$$p(l(\lambda)_a) = \sqrt{\det \left(G_2^{\alpha\gamma} \overline{\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a} G_{1AB} \mathfrak{N}_\beta^{Bb} l(\lambda)_b \right)} = 0 \quad (3.2)$$

donde $G_2^{\alpha\gamma}$ es la inversa de $G_{2\alpha\beta}$.

Notemos que este resultado no depende del par $G_{2\alpha\beta}$, G_{1AB} que hayamos elegido.

Esta expresión nos permite conocer cuando la ecuación de la Eikonal (2.33) tiene solución. De este modo, podemos calcular los autovalores generalizados de la teoría para cada punto (x, ϕ, \hat{k}) . Para ello, seleccionamos $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + \hat{k}_a$, por lo que la expresión

²El subespacio Kernel por derecha esta compuesto por vectores que contraen con el índice bajo en el operador, y el de kernel por izquierda por co-vectores que contraen con el índice alto.

(3.2), se transforma en una ecuación polinómica para λ y $\bar{\lambda}$, donde su solución define los diferentes autovalores generalizados $\lambda_j(\hat{k}_a)$.

Por otro lado, consideramos cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$ fijo y una línea $l(\lambda)_a \in S_{n_a}$, para algún n_a , y definimos las líneas dos-perimétricas extendidas $l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a = -\varepsilon e^{i\theta} n_a + l(\lambda)_a$ con ε real y $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$. De este modo, el símbolo principal perturbado resulta

$$\mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a = (-\lambda \mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} n_a + \mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} k_a) - \varepsilon (e^{i\theta} \mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} n_a). \quad (3.3)$$

Moro et. al. [25] y Soderstrom [26] probaron que los valores singulares de este operador perturbado admiten una expansión de Taylor al menos hasta orden dos en $|\varepsilon|$ y también mostraron formas explícitas para calcular el orden uno. Nosotros vamos a usar estos resultados para probar los nuestros.

Consideremos primero el caso donde no hay vínculos. Es decir $e = u$ y todas las ecuaciones del sistema (3.1) deben ser consideradas como de evolución. Llamamos a este caso, el “*caso cuadrado*” ya que el símbolo principal mapea entre espacios de igual dimensión, $u = \dim(\Phi_R) = \dim(\Psi_L) = e$, y por lo tanto, fijando bases en los respectivos espacios, es una matriz cuadrada.

En este caso, como vimos en la sección 2.3, la introducción o no de h_A^α , no modifica el kernel por derecha de $\mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} l(\lambda)_a$, por lo que no consideraremos ninguna reducción. Por otro lado, del inciso 1 en la definición 3, una condición necesaria para que el sistema sea fuertemente hiperbólico es que $A_{\beta}^{\alpha a} \hat{k}_a$ sea diagonalizable³ con autovalores reales, por lo que el siguiente teorema muestra una forma de garantizar esta condición.

Teorema 10 *El sistema (3.1) con $e = u$ tiene $A_{\beta}^{\alpha a} \hat{k}_a$ diagonalizable y con autovalores reales si y solo si las siguientes condiciones se cumplen*

- 1- Existe n_a tal que el sistema es hiperbólico
- 2- Para cada línea $l(\lambda)_a \in S_{n_a}$, consideramos la línea extendida $l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a$ entonces el símbolo principal perturbado $\mathfrak{N}_{\beta}^{Aa} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a$ tiene solo valores singulares de orden $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$.

En general, la primer condición suele cumplirse, y la segunda suele fallar, por lo que es donde mas cuidado se debe tener. Notemos que para el caso de coeficientes constantes, además de que estas dos condiciones se cumplan, necesitamos la condición de diagonalización uniforme y en el caso cuasi-lineal condiciones de suavidad sobre $H_{\alpha\beta}$. Estas restricciones no son consideradas en este capítulo, ya que solo estamos buscando una condición necesaria.

En la sección 3.4 mostramos ejemplos de aplicación: una matriz de 2×2 , vemos como los valores singulares controlan su diagonalización y un ejemplo físico, fluidos cargados con conductividad finita, mostramos que estos son débilmente hiperbólicos.

Consideremos ahora el caso de $e > u$. Llamamos a este caso, el “*caso rectangular*” ya que ahora el símbolo principal mapea entre espacios vectoriales de diferente dimensión.

³Cuando decimos diagonalizable, nos referimos a que en la descomposición de Jordan el operador es diagonal. También usaremos el nombre Jordan diagonalizable.

Como fue observado en la sección 2.6, en general si consideramos cualquier $l(\lambda)_a \in S_{n_a}$ y sumamos la dimensión del kernel por derecha de $\mathfrak{N}_\beta^{Aa} l(\lambda)_a$ al recorrer sobre todo $\lambda \in \mathbb{R}$, vemos que este numero es menor que u . Es por esto que necesitamos la introducción de alguna reducción h_A^α para aumentar el conteo del kernel hasta u y obtener $A_\beta^{\alpha a} \hat{k}_a$ diagonalizable. El próximo teorema da una condición necesaria para que esto suceda.

Teorema 11 *Cuando consideramos el sistema (3.1) las condiciones 1 y 2 del teorema 10 todavía son necesarias.*

Como ya mencionamos, esta condición tiene importancia practica, ya que permite descartar con simple cálculos, aquellas teorías que no cumplen la condiciones requeridas por el teorema. En la sección 3.4 mostramos como ejemplo, que la Electrodinámica de Force-Free en su versión de potenciales de Euler es débilmente hiperbólica, ya que no cumple la condición 2 del teorema y por lo tanto no admite ningún hiperbolizador. Además mostramos lo simple que resulta concluir que alguno de los valores singulares del símbolo principal es orden $O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$, usando el teorema 19.

3.3. Pruebas de los teoremas 10 y 11.

Para probar nuestros resultados estudiaremos el símbolo principal $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa}(x, \phi) l(z)_a = -z \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a + \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} k_a$ con $l(z)_a \in S_{n_a}^\mathbb{C}$ (el cambio de λ por z , es solo para recordar que $z \in \mathbb{C}$), para algún n_a , tal que $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a$ no tiene kernel por derecha. Y usaremos la siguiente notación $E_{+\alpha}^A(x, \phi, n) := \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a$ y $B_\alpha^A(x, \phi, k) := \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} k_a$. Notemos que esos operadores cambian con los puntos del fibrado (x, ϕ, n) y (x, ϕ, k) respectivamente. Pero como las condiciones que estamos buscando son algebraicas, ellas valen punto a punto, por lo que a partir de ahora asumiremos que $E_{+\alpha}^A$ y B_α^A están evaluados en algún punto particular y suprimiremos la dependencia explicita en los mismos. Por último, definimos $\mathfrak{T}_\alpha^A(z) := \mathfrak{N}_\alpha^{Aa}(x, \phi) l(z)_a$ donde

$$\mathfrak{T}_\alpha^A(z) = -z E_{+\alpha}^A + B_\alpha^A : \Phi_R \longrightarrow \Psi_L \quad (3.4)$$

Llamaremos $\sigma_i[\mathfrak{T}(z)]$ a sus valores singulares para alguna elección de las formas Hermíticas G_{1AB} y $G_{2\alpha\beta}$. Y usaremos barras $\overline{\mathfrak{T}_\alpha^A}$ para denotar conjugación.

Como ya mencionamos antes, en esta sección vamos a perturbar el operador (3.4), como en (3.3), y estudiar los valores singulares perturbados. Algunas referencias son [25], [26], [27] y [28].

Nuestros primeros dos resultados son para operadores cuadrados. Vamos a mostrar que un operador es Jordan diagonalizable si y solo si cada uno de sus valores singulares perturbados es de orden $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$. Además, vamos a extender este resultado y mostrar que: un valor singular perturbado es de orden $O(\varepsilon^l)$ si y solo si el operador tiene

un l -bloque de Jordan⁴ (asociado a algún autovalor), en su descomposición de Jordan.

En el caso de operadores rectangulares, mostraremos que si un valor singular del símbolo principal perturbado es orden $O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$ entonces el sistema no puede ser reducido a un operador diagonalizable, es decir, la hiperbolicidad fuerte solo admite ordenes $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$. Por otro lado, concluiremos que si un valor singular es de orden $O(\varepsilon^l)$ entonces cualquier reducción conduce a sistema reducido con un l -bloque de Jordan o mayor.

3.3.1. Operadores cuadrados.

Consideremos espacios de igual dimensión $e = u$. Por simplicidad identificaremos Ψ_L con Φ_R , pero en general no hay una identificación natural. Sea el operador $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z) = -zE_{+\beta}^\alpha + B_\beta^\alpha : \Phi_R \rightarrow \Phi_R$ con $z \in \mathbb{C}$ y $E_{+\beta}^\alpha$ invertible (sin kernel por derecha). Llamamos λ_i con $i \in F := \{1, \dots, w\}$ a los diferentes autovalores de $(E_+^{-1})_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma$; q_i, r_i a sus multiplicidades geométricas y algebraicas ($q_i \leq r_i$) respectivamente, y $D_\lambda := \{\lambda_i \text{ con } i \in F\}$.

En el siguiente lema, usamos la SVD de $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)$ y mostramos para que z , el operador, tiene valores singulares nulos y cuantos son

Lema 12 1) $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i)$ tiene exactamente q_i valores singulares nulos, los $u - q_i$ restantes son positivos.

2) $\sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)] > 0 \forall i = 1, \dots, u$ si y solo si $z \notin D_\lambda$.

3) Consideremos cualquier conjunto $L \subset \mathbb{C}$, entonces

$$\sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)] > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ y } \forall i = 1, \dots, u$$

si y solo si $D_\lambda \cap L = \emptyset$.

Prueba. 1) Notemos que

$$\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z) = E_{+\gamma}^\alpha (E_+^{-1})_\delta^\gamma \mathfrak{T}_\beta^\delta(z) = E_{+\gamma}^\alpha (z\delta_\beta^\gamma - (E_+^{-1})_\delta^\gamma B_\beta^\gamma).$$

De donde concluimos que $\ker \text{der}(\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)) = \ker \text{der}(z\delta_\beta^\gamma - (E_+^{-1})_\delta^\gamma B_\beta^\gamma)$, por lo tanto $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)$ tiene kernel solo cuando z es un autovalor de $E_+^{-1}B$.

Por otro lado, la SVD de $\mathfrak{T}(z)$ es

$$\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z) = U_{\tilde{\alpha}}^\alpha(z) \Sigma_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\alpha}}(z) (V^{-1})_{\tilde{\beta}}^{\tilde{\gamma}}(z).$$

donde las matrices U , Σ y V^{-1} depende de z . Pero además de las condiciones de ortogonalidad (A.1) y (A.2) vemos que U y V son invertibles para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces $\Sigma(z)$ controla la dimensión del kernel de \mathfrak{T} (este argumento es valido para el caso

⁴Llamamos un l -bloque de Jordan a la matriz $J_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ con autovalor λ .

rectangular también). Consideremos ahora $z = \lambda_i$, sabemos de la definición de q_i que $\dim(\ker \text{der}(\mathfrak{T}(\lambda_i))) = q_i$, pero por corolario 32, $\dim(\ker \text{der}(\mathfrak{T}(\lambda_i)))$ es el número de valores singulares nulos.

2) y 3) son casos particulares de 1). ■

El operador $E_+^{-1}B$ es Jordan diagonalizable cuando $q_i = r_i \forall i$, por lo que, del lema anterior, vemos que esto solo es posible cuando la dimensión del kernel por derecha de $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i) \forall i$ es máxima, es decir, r_i . Veremos que condiciones garantizan esta situación, pero primero necesitamos un Lema previo.

El punto 1 del siguiente Lema es valido para operadores rectangulares también. Este punto y el resultado anterior justifican el lema 9.

Lema 13 1) Dado $P : \Phi_R \longrightarrow \Psi_L$ un operador rectangular con $\dim \Psi_L \geq \dim \Phi_R$. Entonces

$$\sqrt{\det(P^* \circ P)} = \prod_{i=1}^u \hat{\sigma}_i[P] \quad (3.5)$$

2) Consideremos el operador cuadrado $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z) = -zE_{+\beta}^\alpha + B_\beta^\alpha : \Phi_R \longrightarrow \Phi_R$. Entonces

$$\sqrt{\det(\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T})} = \prod_{i=1}^u \hat{\sigma}_i[E_{+\beta}^\alpha] |\lambda_1 - z|^{r_1} \dots |\lambda_w - z|^{r_w} = \prod_{i=1}^u \sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(z)] \quad (3.6)$$

Prueba. 1) Consideremos la SVD de $P_\alpha^A = (U_P)^{A_{\tilde{A}}} (\Sigma_P)^{\tilde{A}}_{\tilde{\alpha}} (V_P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}}$. Donde $(U_P)^{A_{\tilde{A}}} \in \mathbb{C}^{e \times e}$, $(\Sigma_P)^{\tilde{A}}_{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{R}^{e \times u}$ y $(V_P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{C}^{u \times u}$ (ver teorema 31). Entonces

$$\begin{aligned} (P^* \circ P)_\alpha^\beta &= G_2^{\beta\alpha_2} (\bar{V}_P^{-1})_{\alpha_2}^{\tilde{\alpha}_2} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_2}_{\tilde{\alpha}_2} (\bar{U}_P)^{A_2}_{\tilde{A}_2} G_{1A_2A_1} (U_P)^{A_1}_{\tilde{A}_1} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_1}_{\tilde{\alpha}_1} (V_P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}_1} \\ &= (V_P)_{\tilde{\alpha}_3}^\beta \delta_2^{\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_2} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_2}_{\tilde{\alpha}_2} \delta_{1\tilde{A}_2\tilde{A}_1} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_1}_{\tilde{\alpha}_1} (V_P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}_1} \end{aligned}$$

donde hemos usado la condición de ortogonalidad $(\bar{U}_P)^{A_2}_{\tilde{A}_2} G_{1A_2A_1} (U_P)^{A_1}_{\tilde{A}_1} = \delta_{\tilde{A}_2\tilde{A}_1}$ y $G_2^{\beta\alpha_2} (\bar{V}_P^{-1})_{\alpha_2}^{\tilde{\alpha}_2} = V_{\tilde{\alpha}_1}^\beta \delta_2^{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}$.

Tomando determinante y raíz cuadrada

$$\begin{aligned} \sqrt{\det((P^* \circ P)_\alpha^\beta)} &= \sqrt{\det\left((V_P)_{\tilde{\alpha}_3}^\beta \delta_2^{\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_2} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_2}_{\tilde{\alpha}_2} \delta_{1\tilde{A}_2\tilde{A}_1} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_1}_{\tilde{\alpha}_1} (V_P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}_1}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(\delta_2^{\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_2} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_2}_{\tilde{\alpha}_2} \delta_{1\tilde{A}_2\tilde{A}_1} (\Sigma_P)^{\tilde{A}_1}_{\tilde{\alpha}_1}\right)} \\ &= \prod_{i=1}^u \sigma_i[P_\alpha^A] \end{aligned}$$

2) Similarmente, tomando determinante de $\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\det(\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T})} &= \sqrt{\det\left(G_2^{\eta\beta} \overline{\mathfrak{T}}_\beta^\alpha(z) G_{1\alpha\gamma} \mathfrak{T}_\beta^\gamma(z)\right)} \\
 &= \sqrt{\det\left(G_2^{\alpha\rho} \left(\bar{z}\delta_\rho^\mu - \left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\mu \overline{B}_\rho^\gamma\right) \overline{E}_{+\mu}^\nu G_{1\nu\gamma} E_{+\eta}^\gamma \left(z\delta_\beta^\eta - \left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\eta B_\beta^\gamma\right)\right)} \\
 &= \sqrt{\det\left(G_2^{\alpha\mu} \overline{E}_{+\mu}^\nu G_{1\nu\gamma} E_{+\eta}^\gamma\right)} \times \\
 &\quad \sqrt{\det\left(\bar{z}\delta_\rho^\mu - \left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\mu \overline{B}_\rho^\gamma\right) \det\left(z\delta_\beta^\eta - \left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\eta B_\beta^\gamma\right)} \\
 &= \sqrt{\det\left(G_2^{\alpha\mu} \overline{E}_{+\mu}^\nu G_{1\nu\gamma} E_{+\eta}^\gamma\right) |\lambda_1 - z|^{r_1} \dots |\lambda_w - z|^{r_w}} \\
 &= \sigma_1[E_+] \dots \sigma_u[E_+] |\lambda_1 - z|^{r_1} \dots |\lambda_w - z|^{r_w}
 \end{aligned}$$

En la cuarta línea hemos usado que

$$\det\left(z\delta_\beta^\eta - \left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\eta B_\beta^\gamma\right) = (\lambda_1 - z)^{r_1} \dots (\lambda_w - z)^{r_w}$$

y en la última línea, el inciso 1 del Lema para E_+ . Por lo tanto, concluimos

$$\left(\prod_{i=1}^u \sigma_i[E_+]\right) |\lambda_1 - z|^{r_1} \dots |\lambda_w - z|^{r_w} = \sqrt{\det(\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T})} = \sigma_1[\mathfrak{T}] \dots \sigma_u[\mathfrak{T}]$$

■

Notemos que si ponemos $z = \lambda_1 + \varepsilon$ (con ε real y pequeño) en la ecuación (3.6), entonces el producto de los valores singulares es orden $O(\varepsilon^{r_1})$. Ya que esos valores singulares tienen expansión de Taylor en ε , si todos los valores singulares son orden $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$, entonces necesitamos que r_1 de ellos se anulen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir, necesitamos que r_1 de ellos sean orden $O(\varepsilon^1)$. Por lo tanto, por el Lema 12, vale que $q_1 = r_1$. Si además, esto es cierto para todo λ_i ($q_i = r_i$) entonces $\left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ es diagonalizable.

El siguiente teorema es una formalización de esta idea. Notemos que los ordenes de los valores singulares son invariantes bajo diferentes elecciones de las formas Hermíticas G_{1AB} , $G_{2\alpha\beta}$, sin embargo, los valores singular no lo son. La prueba de esto se encuentra en el apéndice B.

Teorema 14 Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) $\left(E_+^{-1}\right)_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ es Jordan diagonalizable.
- 2) $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i) = -zE_{+\beta}^\alpha + B_\beta^\alpha$ tiene r_i valores singulares nulos para cada λ_i con $i \in F$.
- 3) Para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$ con ε real, los valores singulares del operador perturbado $\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i + \varepsilon e^{i\theta}) = \mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i) - \varepsilon e^{i\theta} E_{+\beta}^\alpha$ son de la siguientes forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_j\left[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i + \varepsilon e^{i\theta})\right] &= \sigma_j\left[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i)\right] + \xi_j \varepsilon + O(\varepsilon^2) \text{ con } \sigma_j\left[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i)\right] \neq 0 \text{ o} \\
 \sigma_j\left[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i + \varepsilon e^{i\theta})\right] &= \xi_j |\varepsilon| + O(\varepsilon^2) \text{ con } \xi_j \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

⁵para todo $\lambda_i \in D_\lambda$, es decir, ninguno de ellos es de la forma $\sigma\left[\mathfrak{T}_\beta^\alpha(\lambda_i + \varepsilon e^{i\theta})\right] = O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$.

⁵Notemos que los ordenes de los valores singulares perturbados son independientes de θ .

Prueba. 1) \iff 2) Esto es cierto, debido a que para cada autovalor, las multiplicidades geométricas y algebraicas son iguales $q_i = r_i \forall i = 1, \dots, w$.

3) \iff 1) Usando el lema 13

$$\left(\prod_{i=1}^u \sigma_i [E_+] \right) |\lambda_1 - z|^{r_1} \dots |\lambda_w - z|^{r_w} = \sigma_1 [-zE_+ + B] \dots \sigma_u [-zE_+ + B]. \quad (3.8)$$

Consideremos $z = \lambda_i + \varepsilon e^{i\alpha}$ con ε menor que la distancia entre cualesquiera dos autovalores λ_i

$$\varepsilon < \min \{ |\lambda_i - \lambda_j| \text{ con } i, j = 1, \dots, w \text{ y } i \neq j \}. \quad (3.9)$$

Por lema 12, sabemos que q_i valores singulares tienen que anularse para $z = \lambda_i$ y $\varepsilon = 0$. Supongamos que ellos son los primeros q_i , los llamaremos $(\sigma_{\lambda_i})_j [-zE_+ + B]$, con $j = 1, \dots, q_i$ entonces podemos reescribir la ecuación (3.8) del siguiente modo,

$$\varepsilon^{r_i} = (\sigma_{\lambda_i})_1 [(-\lambda_i E_+ + B) - \varepsilon(e^{i\theta} E_+)] \dots (\sigma_{\lambda_i})_{q_i} [(-\lambda_i E_+ + B) - \varepsilon(e^{i\theta} E_+)] p(z)|_{z=\lambda_i+\varepsilon e^{i\theta}} \quad (3.10)$$

donde

$$p(z)|_{z=\lambda_i+\varepsilon e^{i\alpha}} = \frac{\sigma_{q_i+1} [-zE_+ + B] \dots \sigma_u [-zE_+ + B]|_{z=\lambda_i+\varepsilon e^{i\theta}}}{\left(\prod_{i=1}^u \sigma_i [E_+] \right) |\lambda_1 - \lambda_i - \varepsilon e^{i\alpha}|^{r_1} \dots |\lambda_{i-1} - \lambda_i - \varepsilon e^{i\alpha}|^{r_{i-1}} |\lambda_{i+1} - \lambda_i - \varepsilon e^{i\alpha}|^{r_{i+1}} \dots |\lambda_w - \lambda_i - \varepsilon e^{i\alpha}|^{r_w}}.$$

Notemos que $p(z)|_{z=\lambda_i+\varepsilon e^{i\alpha}}$ no se anula, por Lema 12, y no diverge para ε suficientemente pequeños debido a la condición (3.9).

Sabemos del punto 2 en el teorema 34 (en el apéndice B), que para $|\varepsilon| \ll 1$ los σ'_s pueden ser expandidos como

$$\begin{aligned} (\sigma_{\lambda_i})_j [(-\lambda_i E_+ + B) + \varepsilon(-e^{i\theta} E_+)] &= (\sigma_{\lambda_i})_j [(-\lambda_i E_+ + B) + \varepsilon(-e^{i\theta} E_+)] \\ &= |\varepsilon| \xi_j + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Donde los ξ_j vienen dados por la ecuación (B.4).

Si reemplazamos la ultima expresión en (3.10), obtenemos

$$|\varepsilon|^{r_i - q_i} = \xi_1 \dots \xi_{q_i} p(z)|_{z=\lambda_i+\varepsilon e^{i\theta}} + O(\varepsilon) \quad (3.11)$$

Por lo tanto :

♦ 3) \implies 1) Por hipótesis $\xi_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, q_i$; entonces la ecuación (3.11) solo puede ser valida si $q_i = r_i \forall i = 1, \dots, k$ (tomando ε suficientemente chico). Por lo tanto $(E_+^{-1})_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ es diagonalizable.

♦ 1) \implies 3) Si $(E_+^{-1})_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ es diagonalizable, entonces $r_i = q_i$ por lo que tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos $1 = \xi_1 \dots \xi_{q_i} p(z)|_{z=\lambda_i}$. Esto implica que $\xi_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, q_i$. Debido $r_i = q_i$ para todo i , concluimos la prueba del teorema. ■

Una interpretación de la condición 3 del teorema anterior, es la siguiente, para toda matriz cuadrada no Jordan diagonalizable, siempre es posible encontrar un autovector por

derecha, tal que la contracción de este con todos los autovectores por izquierda es nula. Esto es imposible si el operador es diagonalizable.

Veamos un ejemplo.

$$B_{\beta}^{\alpha} = P_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{matrix} (P^{-1})_{\beta}^{\tilde{\beta}} \quad (3.12)$$

y tal que $E_{+\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ es la matriz identidad. Los autovectores por derecha son

$$(v_1)^{\alpha} = P_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\tilde{\alpha}} \quad (v_2)^{\alpha} = P_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\tilde{\alpha}}$$

y por izquierda

$$(u_1)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\alpha}} (P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \quad (u_2)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\tilde{\alpha}} (P^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\alpha}}$$

de donde, como dijimos

$$(u_1, 2)_{\alpha} (v_2)^{\alpha} = 0 \quad (3.13)$$

Por otro lado, podemos usar la ecuación B.4 para calcular el primer orden de perturbación de $\mathfrak{T}_{\beta}^{\alpha} (\lambda_1 + \varepsilon e^{i\theta}) = (-\lambda_1 E_{+\beta}^{\alpha} + B_{\beta}^{\alpha}) - \varepsilon e^{i\theta} E_{+\beta}^{\alpha}$ que viene dado por los valores singulares de L_k^j con

$$L_k^j := \begin{pmatrix} (u_1)_{\alpha} \\ (u_2)_{\alpha} \end{pmatrix} \delta_{\beta}^{\alpha} \left((v_1)^{\beta}, (v_2)^{\beta} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $\xi_i = \sigma_i [L_k^j]$.

Dado que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es kernel de L_k^j , concluimos rápidamente que $\xi_2 = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{T}_{\beta}^{\alpha} (\lambda_1 + \varepsilon e^{i\theta})$ tiene un valor singular de orden $O(\varepsilon^2)$, lo que significa que $(E_+^{-1})_{\gamma}^{\eta} B_{\beta}^{\gamma} = B_{\beta}^{\eta}$ no es diagonalizable, como claramente podemos ver de su expresión (3.12).

En el capítulo 4, introduciremos la noción de ángulos entre subespacios, y veremos que la ecuación (3.13), refleja el hecho de que uno de esos ángulos es $\frac{\pi}{2}$, condición que no puede suceder en un sistema fuertemente hiperbólico.

Cuando los autovalores de $(E_+^{-1})_{\gamma}^{\eta} B_{\beta}^{\gamma}$ son reales, podemos escribir el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario 15 Las siguientes condiciones son equivalentes

- 1) $(E_+^{-1})_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ es Jordan diagonalizable con autovalores reales.
- 2) Todos los valores singulares satisfacen

$$\sigma_j [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x + iy)] > 0 \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ y } y \neq 0 \quad (3.14)$$

Para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$ con ε real,

$$\begin{aligned} \sigma_j [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x + i\varepsilon e^{i\theta})] &= \sigma_j [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x)] + \xi_j \varepsilon + O(\varepsilon^2) \text{ con } \sigma_j [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x)] \neq 0 \text{ o} \\ \sigma_j [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x + i\varepsilon e^{i\theta})] &= \xi_j |\varepsilon| + O(\varepsilon^2) \text{ con } \xi_j \neq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir, ninguno de ellos es de la forma $\sigma [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (x + i\varepsilon e^{i\theta})] = O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$.

Prueba. 1) \implies 2). Se sigue directamente del teorema 14.

2) \implies 1). Debido a que $\sigma_i [T_\beta^\alpha (z)] > 0 \forall i$ y $\forall z \in S = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) \neq 0\}$, entonces por Lema 12, $S \cap D_\lambda = \emptyset$. Por lo tanto los autovalores son reales. La segunda parte también se sigue del teorema 14. ■

Para terminar esta sección, probamos el siguiente teorema

Teorema 16 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha (\lambda_i + \varepsilon e^{i\theta})$ tiene un valor singular de orden $O(\varepsilon^l)$ si y solo si $(E_+^{-1})_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ tiene un l -bloque de Jordan, con autovalor λ_i , en su descomposición de Jordan.

Prueba. Consideramos una base en la que $(E_+^{-1})_\gamma^\eta B_\beta^\gamma$ este en su forma de Jordan. En esta base elegimos las formas Hermíticas $G_{1AB} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ y $G_{2\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Entonces el calculo de $\sigma_i [\mathfrak{T}_\beta^\alpha (\lambda)]$ con $i = 1, \dots, u$ se desacopla por bloques. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar los valores singulares de un l -bloque de Jordan. Es fácil ver de la ecuación (3.6), con $z = \lambda + e^{i\theta}\varepsilon$, que $J_l(\lambda)$ tiene un único valor singular de orden $O(\varepsilon^l)$ y que los otros son de orden $O(\varepsilon^0)$. Esto completa la prueba. ■

3.3.2. Operadores rectangulares.

En esta sección consideramos $e \geq u$ y mostramos el teorema 18; este provee una condición necesaria para reducir un operador rectangular a uno cuadrado, tal que el operador resultante es Jordan diagonalizable. Este resultado, es también la prueba del teorema 11.

Necesitamos primero introducir un Lema (para una prueba ver [29]).

Lema 17 Consideremos los operadores $\mathfrak{T}_\beta^A(z) = -zE_{+\beta}^A + B_\beta^A : \Phi_R \longrightarrow \Psi_L$

$h_A^a : \Psi_L \rightarrow \Phi_R$ y $H_\beta^\alpha := h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A : \Phi_R \rightarrow \Phi_R$ entonces

$$0 \leq \sigma_i[H_\beta^\alpha] \leq \sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^A] \max \{\sigma_j[h_A^\alpha]\}, \quad (3.16)$$

⁶donde los valores singulares han sido ordenados de mayor a menor para cada operador.

⁶Los valores singulares son $\sigma_i[H_\beta^\alpha] = \sqrt{\lambda_i [G_2^{-1} \circ \bar{H}' \circ G_2 \circ H]}$, $\sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^A] = \sqrt{\lambda_i [G_2^{-1} \circ \bar{\mathfrak{T}}' \circ G_1 \circ \mathfrak{T}]}$ y $\sigma_i[h_A^a] = \sqrt{\lambda_i [G_1^{-1} \circ \bar{h}' \circ G_2 \circ h]}$. Donde $\lambda_i[K]$ son los autovalores de K .

Consideremos una reducción suryectiva $h_A^\alpha : \Psi_L \rightarrow \Phi_R$, que no depende de z , del operador $\mathfrak{T}_\beta^A(z) = -zE_{+\beta}^A + B_\beta^A : \Phi_R \rightarrow \Psi_L$, tal que $E_{+\beta}^A$ no tiene kernel por derecha⁷ y $h_A^\alpha E_{+\beta}^A$ es invertible. Entonces, el teorema principal es:

Teorema 18 *Supongamos que al menos uno de los valores singulares de $\mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, cumple que*

$$\sigma \left[\mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta}) \right] = O(\varepsilon^l) \text{ con } l \geq 2,$$

entonces, para cualquier reducción h_A^α (definido previamente), existe al menos un valor singular de $h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})$ tal que

$$\sigma \left[h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta}) \right] = O(\varepsilon^m) \text{ con } m \geq l \geq 2.$$

Entonces $\left((hE_+)^{-1} \right)_\gamma^\alpha h_A^\gamma B_\beta^A$ no es diagonalizable, con $\left((hE_+)^{-1} \right)_\gamma^\alpha$ la inversa de $h_C^\alpha E_{+\gamma}^A$.

Prueba. Usamos el Lema 17 para $\mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})$ y $h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})$, sea $\frac{1}{C} := \max\{\sigma_j[h_A^\alpha]\}$ (no se anula, ya que $h_A^\alpha \neq 0$ y no depende de λ), entonces por la ecuación (3.16)

$$0 \leq \sigma_i[h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})] \leq \sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})] \frac{1}{C}.$$

Debido a que para algún i , $\sigma_i[\mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})] = O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$, concluimos $\sigma_i[h_A^\alpha \mathfrak{T}_\beta^A(\lambda + \varepsilon e^{i\theta})] = O(\varepsilon^m)$ con $m \geq l \geq 2$. Ya que $C\varepsilon^m \leq \varepsilon^l$ para $0 \leq \varepsilon \ll 1$ es solo posible si $m \geq l$.

Aplicando el teorema 14 a

$$\tilde{\mathfrak{T}}_\beta^\alpha = h_A^\alpha B_\beta^A - z(h_A^\alpha E_{+\beta}^A)$$

y recordando que $h_A^\alpha E_{+\beta}^A$ es invertible por hipótesis, concluimos que $\left((hE_+)^{-1} \right)_\gamma^\alpha h_A^\gamma B_\beta^A$ no es diagonalizable.

Este resultado considera perturbaciones de los valores singulares alrededor de los valores singulares nulos. Como vimos en el apéndice B, los ordenes de la perturbación permanecen invariantes bajo cualquier cambio de las Formas Hermíticas. Entonces el resultado no depende de las particularidades de la SVD. ■

3.4. Aplicaciones y ejemplos.

En esta sección mostraremos como chequear las condiciones 1 y 2 del teorema 11, en ciertas teorías.

⁷Notemos que, como en el caso cuadrado, un operador rectangular \mathfrak{T}_β^A tiene kernel por derecha cuando al menos un valor singular se anula (ver prueba del Lema 12). Pero esto es equivalente a que se anule la ecuación (3.5). Por lo tanto, $E_{+\beta}^A$ no tiene kernel por derecha si y solo si $\det(E_+^* \circ E_+) = \sigma_1[E_+] \dots \sigma_u[E_+] \neq 0$.

Condición 1: Como vimos anteriormente el sistema es hiperbólico si las raíces de

$$\sqrt{\det \left(G^{\alpha\gamma} \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a G_{AB} \mathfrak{N}_\beta^{Bb} l(\lambda)_b \right)} = 0 \quad (3.17)$$

para λ , son reales. Donde $l(\lambda)_b = -\lambda n_a + \hat{k}_a \in S_{n_a}^{\mathbb{C}}$ para algún n_a tal que $\mathfrak{N}_\beta^{Bb} n_b$ no tiene kernel por derecha. De este modo, las raíces $\lambda_m(\hat{k})$ son los autovalores generalizados⁸ y $l(\lambda_m)_b$ los co-vectores característicos. Notemos que explícitamente ponemos la dependencia en \hat{k} en λ_m .

Condición 2: en general no es fácil calcular los valores singulares de una matriz y menos hacer una expansión en Taylor en ε . Afortunadamente el siguiente teorema 19, muestra una forma simple de realizar el calculo.

Asumiendo que la condición 1 ya fue chequeada para n_a . Entonces el símbolo principal $\mathfrak{N}_\beta^{Bb} l(\lambda_m(\hat{k}))_b$ tiene kernel por derecha y por izquierda. Llamemos $V_i^\gamma(\lambda_m(\hat{k}))$ and $U_A^j(\lambda_m(\hat{k}))$ with $i = 1, \dots, \dim(\ker_{\text{izq}}(\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda_m)_a))$ y $j = 1, \dots, \dim(\ker_{\text{der}}(\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n(\lambda_m)_a))$ a cualquier base de esos espacios respectivamente⁹.

Teorema 19 *Una condición necesaria para que el sistema (3.1) sea fuertemente hiperbólico es que la siguiente matriz*

$$L_i^j(\lambda_m) := U_A^j(\lambda_m) (\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a) V_i^\gamma(\lambda_m) \quad (3.18)$$

no tenga kernel por derecha.

La definición de $L_i^j(\lambda_m)$ es equivalente a

$$\tilde{L}_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{A}} := \delta_1^{\tilde{A}\tilde{B}}(0, U_1, U_3)_{\tilde{B}}^C \delta_{1CD} \mathfrak{N}_\alpha^{Da} n_a(0, V_1)_{\tilde{\gamma}}^\alpha, \quad (3.19)$$

en la ecuación (B.4), en el apéndice B. En esta última expresión tanto U como V están ortonormalizados, en las métricas $G_{1AB} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ y $G_{2\alpha\beta} = (1, \dots, 1)$, siguiendo las ecuaciones (A.1) y (A.2). Sin embargo esta normalización no es necesaria ya que $\tilde{L}_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{A}}$ tiene kernel por derecha, si y solo si, L_i^j lo tiene. Y si $\tilde{L}_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{A}}$ tiene kernel por derecha, significa que uno de sus valores singulares es nulo, por lo tanto algun valor singular de $\sigma_i[\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda_m + \varepsilon e^{i\theta})_a]$ es de orden $O(\varepsilon^p)$ con $p \geq 2$. Cuando esto sucede, concluimos usando el teorema 11, que el sistema en cuestión no tiene ninguna reducción fuertemente hiperbólica.

Mostramos algunos ejemplos.

3.4.1. Ejemplo 2×2 .

Consideramos la matriz

$$\mathfrak{T}(z) = -zE_+ + B := -z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \kappa \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (3.20)$$

⁸Recordamos que \hat{k}_a es tal que $t^a \hat{k}_a = 0$ y $|\hat{k}| = 1$, en alguna norma definida positiva.

⁹Ellos son un conjunto de vectores linealmente independientes tal que $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda_m)_a V_i^\gamma(\lambda_m) = 0$ y $U_A^j(\lambda_m) \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda_m)_a = 0$.

tal que λ_1, λ_2 y κ son constantes. Considerando los productos escalares $G_{1,2} = \delta_{1,2} = \text{diag}(1, 1)$, los valores singulares de $\mathfrak{T}(z)$ son

$$\begin{aligned}\sigma_1[\mathfrak{T}(z)] &= \sqrt{\omega(z) + \sqrt{\omega^2(x) - |z - \lambda_1|^2 |z - \lambda_2|^2}} \\ \sigma_2[\mathfrak{T}(z)] &= \sqrt{\omega(z) - \sqrt{\omega^2(x) - |z - \lambda_1|^2 |z - \lambda_2|^2}}\end{aligned}$$

con

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(|z - \lambda_1|^2 + |z - \lambda_2|^2 + |\kappa|^2 \right)$$

una función de z con valores positivos o nulos. Notemos que $\sigma_1[\mathfrak{T}(z)]$ se anula solo cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\kappa = 0$.

La expansión de Taylor de σ_2 centrada en $\lambda_{1,2}$ es¹⁰:

$$\sigma_2(\lambda_{1,2} + \varepsilon) \approx 0 + \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{|\lambda_1 - \lambda_2|^2 + |\kappa|^2}} |\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$$

Seguendo el teorema 14

- B no es diagonalizable cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\kappa \neq 0$. En ese caso $\sigma_2(\lambda_{1,2} + \varepsilon) = O(|\varepsilon|^2)$.
- B es diagonalizable para cualquier otro caso, en donde los valores singulares tienen ordenes $O(\varepsilon^0)$ u $O(\varepsilon^1)$.

3.4.2. Electrodinámica de Force Free en la forma de potenciales de Euler

En esta subsección estudiamos la electrodinámica de Force Free en la forma de potenciales de Euler [30, 31]. Cuando escribimos el sistema en su versión en primer orden, este es un sistema con vínculos diferenciales. Veremos que es un sistema débilmente hiperbólico.

El mismo resultado fue obtenido en primera instancia por Reula y Rubio [32]. Ellos llegaron a esta conclusión usando los potenciales como campos; obteniendo un sistema de segundo orden en derivadas, que después es llevado a primer orden de forma pseudo-diferencial, sin producir vínculos extras; y finalmente chequeando la falta de hiperbolicidad fuerte usando los criterios de Kreiss [1].

La ventaja de nuestra técnica es que usa los gradientes de los potenciales como campos, por lo que directamente obtenemos un sistema de primer orden en derivadas parciales pero con vínculos. A este sistema, le aplicamos el teorema 11 y vemos que la condición 2 falla, por lo que concluimos que no existe ningún hiperbolizador.

En este sistema el tensor electromagnético F_{ab} es degenerador $F_{ab} j^b = 0$ y magnéticamente dominado $F := F_{ab} F^{ab} > 0$. Esas condiciones nos permiten descomponer

¹⁰Para calcular la expansión de Taylor usamos la identidad $X - \sqrt{X^2 - Y^2} = \frac{1}{2} (\sqrt{X+Y} - \sqrt{X-Y})^2$ para X, Y reales y tal que $X+Y, X-Y > 0$

$F_{ab} = l_{1[a}l_{2]b}$, (ver [33, 34]) en termino de dos uno-formas l_{ia} con $i = 1, 2$. Para trabajos mas detallados de la Electrodinámica de Force Free recomendamos [35, 36, 12, 34].

Un paso mas puede ser dado, Carter 1979 [30] y Uchida 1997 [31] probaron que existen dos potenciales ϕ_1 y ϕ_2 tal que $l_{ia} = \nabla_a \phi_i$.

Con todo lo anterior, las ecuaciones de Force Free en su versión de gradientes de potenciales de Euler resultan

$$l_{ka} \nabla_b \left(l_i^a l_j^b \varepsilon^{ij} \right) = 0$$

$$\nabla_{[a} l_{i|b]} = 0$$

con métrica de fondo g_{ab} . De donde el símbolo principal es

$$\mathfrak{N}_\alpha^{Aa}(x, \phi) m_a \delta \phi^\alpha = \begin{pmatrix} (l_{1a}(l_2.m) - (l_1.l_2)m_a) & ((l_1.l_1)m_a - l_{1a}(l_1.m)) \\ (l_{2a}(l_2.m) - (l_2.l_2)m_a) & ((l_1.l_2)m_a - l_{2a}(l_1.m)) \\ m^{[b} \delta_a^{c]} & 0 \\ 0 & m^{[b} \delta_a^{c]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta l_1^a \\ \delta l_2^a \end{pmatrix}$$

Recordemos que cuando esta ecuación se anula, es la ecuación de la Eikonal (2.32).

El espacio de campos, es 8-dimensional y viene dado por $\delta \phi^\alpha = \begin{pmatrix} \delta l_1^a \\ \delta l_2^a \end{pmatrix}$. El espacio de ecuaciones es 14-dimensional con co-vectores $\delta X_A = (\delta W, \delta X, \delta Y_{bc}, \delta Z_{bc})$ donde $\delta Y_{bc} = \delta Y_{[bc]}$ y $\delta Z_{bc} = \delta Z_{[bc]}$.

1) Chequeemos primero que el sistema es hiperbólico: consideremos n_a temporal y normalizado $n_a n^a = -1$, ya que los l_{ia} pueden ser elegidos ortogonales (vía una transformación de gauge), definimos un frame ortonormal $\{e_{ia} \mid i = 0, 1, 2, 3\}$ con $e_{0a} = n_a$ y $l_{ia} = l_i e_{ia}$ $i = 1, 2$ y tal que $g_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$. Consideremos los planos $m(\lambda)_a = -\lambda e_{0a} + k_a \in S_{e_{0a}}^\mathbb{C}$ con $\lambda = n_0 \in \mathbb{C}$, $k_a = k_i e_{ia}$ para $i = 1, 2, 3$ con k_i reales y con $G_{1AB} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, $G_2^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Usando la ecuación (3.17) la estructura características del símbolo principal esta dada por

$$0 = \sqrt{\det \left(G_2^{\alpha\gamma} \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \bar{m}(\lambda)_a G_{1AB} \mathfrak{N}_\beta^{Bb} m(\lambda)_b \right)}$$

$$= \left(|n_0|^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right)^2 \left| (-n_0^2 + k_3^2) \right| \left| m_a g^{ab} m_b \right| l_1^2 l_2^2. \quad (3.21)$$

Notemos que \mathfrak{N}_α^{Ab} es real. Por lo que, la estructura característica viene dada en términos de la métrica de fondo y una métrica $g_1^{ab} := \text{diag}(-1, 0, 0, 1)$, es decir

$$0 = m_a g^{ab} m_b \quad \text{y} \quad 0 = m_a g_1^{ab} m_b \quad (3.22)$$

Notemos que la introducción de las métricas G_1 y G_2 (no naturales a la teoría) se refleja en la aparición de la métrica Euclidia $g_2^{ab} m_a m_b = |n_0|^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ en (3.21).

De este modo, las velocidades de propagación del sistema general son

$$\lambda_{1\pm}(k) = n_0 = \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2},$$

$$\lambda_{2\pm}(k) = n_0 = \pm k_3,$$

todas reales, por lo que el sistema es hiperbólico.

2) Chequeemos que la condición 2, en el teorema 11 falla. Para este sistema, es posible calcular los valores singulares. Solo mostramos el relevante (con n_0 real)

$$\sigma_1 \left[\mathfrak{N}_{\beta}^{Bb} n_b \right] := \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{N + 2(n_0^2 - k_3^2) l_2^2} - \sqrt{N - 2(n_0^2 - k_3^2) l_2^2} \right|$$

$$N := k_1^2 + k_2^2 + (n_0^2 + k_3^2) (1 + l_2^4)$$

Notemos que este se anula cuando $n_0^2 - k_3^2 = 0$.

Consideremos ahora la línea $m(\lambda)_a = -\lambda e_{0a} + k_a \in S_{e_{0a}}$ con λ real, tal que $k_a = k_1 e_{1a}$ y con autovalores característicos $\lambda = 0$, es decir, $m(\lambda)_a g_1^{ab} m(\lambda)_b|_{\lambda=0} = 0$. Perturbando el valor singular en una vecindad de este co-vector

$$m_{\varepsilon, \theta}(\lambda = 0)_a = -\varepsilon e^{i\theta} e_{0a} - \lambda e_{0a} + k_a \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \theta=0}}$$

obtenemos

$$\sigma_1(\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^2 \left(\frac{(1 + 3l_2^4)}{\sqrt{k_1^2 + \varepsilon^2 (1 + 3l_2^4)}} - \frac{(1 - l_2^4)}{\sqrt{k_1^2 + \varepsilon^2 (1 - l_2^4)}} \right)$$

Este valor singular es de orden $O(\varepsilon^2)$, por lo que, usando el teorema 11, no existe un hiperbolizador y el sistema es débilmente hiperbólico.

Como mencionamos antes, en general no es simple calcular los valores singulares explícitamente. Por lo que también vamos a usar el teorema 19 para llegar al mismo resultado.

Consideremos la misma línea $m(\lambda)_a$, entonces el símbolo principal resulta

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} m(\lambda)_a &= -\lambda \mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} e_{0a} + \mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} k_a \\ &= -\lambda \begin{pmatrix} 0 & l_1^2 e_{0a} \\ -l_2^2 e_{0a} & 0 \\ e_0^{[b} \delta_a^{c]} & 0 \\ 0 & e_0^{[b} \delta_a^{c]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_2^2 k_1 e_{1a} & -l_1 l_2 k_1 e_{2a} \\ k_1 e_1^{[b} \delta_a^{c]} & 0 \\ 0 & k_1 e_1^{[b} \delta_a^{c]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definimos L_i^j como en la ec. (3.18), para ello necesitamos calcular el kernel por izquierda y derecha de $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} m(\lambda = 0)_a$. El mismo resulta

$$\begin{pmatrix} \delta W \\ \delta X \\ \delta Y_{bc} \\ \delta Z_{bc} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{0[b} e_{2a]} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{0[b} e_{3a]} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{2[b} e_{3a]} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{0[b} e_{2a]} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{0[b} e_{3a]} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{2[b} e_{3a]} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \delta l_1^a \\ \delta l_2^a \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ e_1^a \end{pmatrix} \right\rangle$$

respectivamente.

Por lo que

$$L_i^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

que trivialmente se anula y por lo tanto tiene kernel derecho. Entonces, como dijimos antes, hay un valor singular de orden al menos cuadrático en la perturbación, y no existe ningún hiperbolizador.

Notemos que, si hacemos otra elección de n_a fuera del cono de la métrica de fondo, entonces existirán autovalores característicos complejos y el sistema no será siquiera hiperbólico y por lo tanto, el sistema no sera hiperbolizable.

3.4.3. Fluidos cargados con conductividad finita

En esta subsección, estudiamos fluidos cargados con conductividad finita en su forma en primer orden en derivadas, donde el bloque que será relevante para nosotros en el símbolo principal no tiene vínculos. Veremos que este sistema es débilmente hiperbólico si la conductividad es no nula, y fuertemente hiperbólico cuando esta se anula. Este resultado esta de acuerdo con [37] capítulo IX.

El sistema es

$$\begin{aligned} u^m \nabla_m n + n \nabla_m u^m &= 0 \\ u^a \nabla_a \rho + (\rho + p) \nabla_a u^a &= u_b J^a F_a^b \\ (\rho + p) u^a \nabla_a u^b + D^b p &= -h_c^b J^a F_a^c \\ u^m \nabla_m q + q \nabla_m u^m + \sigma F_a^m \nabla_m u^a &= \sigma u^a J_a \\ \nabla_a F^{ab} &= J^b \\ \nabla_a F^{*ab} &= 0 \\ J^a &= q u^a + \sigma u_b F^{ba} \end{aligned}$$

con métrica de fondo g_{ab} y $h_c^b := (\delta_c^b + u^b u_c)$, $u^a u_a = -1$, $D^b := h^{bc} \nabla_a$, $p = p(n, \rho)$. Acá ρ es la densidad de energía propia del sistema, n la densidad de masa propia, u^a la cuadri-velocidad, q la densidad carga propia, p la presión del fluido y σ la conductividad. Para ejemplos de estos sistemas ver [38, 39, 40].

Las variables del sistema a evolucionar son $(n, \rho, u^a, q, F^{ab})$. Este es un sistema cuasi-lineal, por lo que el símbolo principal en su versión linealizada y de alta frecuencia

resulta en

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{N}_{fluid})_{\alpha}^{Aa}(x, \phi) l_a \delta \phi^{\alpha} = & \begin{pmatrix} u.l & 0 & n l_b & 0 \\ 0 & u.l & (p + \rho) n_b & 0 \\ p_n h^{am} l_m & p_{\rho} h^{am} l_m & (\rho + p) \delta_b^a (u.l) & 0 \\ 0 & 0 & (q \delta_b^m + \sigma F_b^m) l_m & u.l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta \rho \\ \delta u^b \\ \delta q \end{pmatrix} = 0 \\
 (\mathfrak{N}_{Electro})_{\alpha}^{Aa}(x, \phi) l_a \delta \phi^{\alpha} = & \begin{pmatrix} l_a \\ l_c \varepsilon_{dab}^c \end{pmatrix} \delta F^{ab} = 0
 \end{aligned}$$

con $u_a \delta u^a = 0$. Notemos que a nivel del símbolo principal, la parte de los fluidos, desacopla de la parte electrodinámica. Por lo que solo estudiaremos la parte de los fluidos, ya que es aquí donde la hiperbolicidad fuerte se rompe. Esta parte del sistema no tiene vínculos.

El espacio de campos es 6-dimensional y viene dado por $\delta \phi^{\alpha} = \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta \rho \\ \delta u^b \\ \delta q \end{pmatrix}$; el espacio de ecuaciones es 6-dimensional también, con co-vectores

$\delta X_A = \begin{pmatrix} \delta W & \delta X & \delta Y_a & \delta Z \end{pmatrix}$, tal que $\delta Y_a u^a = 0$

La estructura característica de la parte de los fluidos es

$$\det(\mathfrak{N}_{fluid}^{Aa} l_a) = -(\rho + p)^4 (l_a u^a)^4 g_1^{ab} l_a l_b = 0 \quad (3.24)$$

Esto significa que

$$l_a u^a = 0 \quad \text{y} \quad g_1^{ab} l_a l_b = 0$$

con $g_1^{ab} := \left(\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_{\rho} \right) h^{ab} - u^a u^b$ (esta métrica es lorentziana mientras se cumpla $\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_{\rho} > 0$).

Por otro lado, la estructura característica de la parte electrodinámica es

$$g^{ab} l_a l_b = 0$$

La ecuación $l_a u^a = 0$ corresponde a ondas materiales, $g_1^{ab} l_a l_b = 0$ a ondas acústicas y $g^{ab} l_a l_b = 0$ a ondas electromagnéticas.

1) Chequeemos la condición 1 del teorema 10. Consideremos una línea $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$ con $n_a = u_a$ y k_a espacial, tal que $k_a u^a = 0$. Notamos en la ec. (3.24) que $\mathfrak{N}_{fluid}^{Aa} n_a$ no tiene kernel por derecha cuando $(\rho + p) \neq 0$, además, el sistema es hiperbólico para $n_a = u_a$ si $\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_{\rho} \geq 0$. Esto significa que las velocidades de las ondas acústicas $v := \sqrt{\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_{\rho}}$ son reales. Las velocidades características del sistema general son

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(k) &= 0 \\
 \lambda_{2\pm}(k) &= \pm \sqrt{\left(\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_{\rho} \right)} |k| \\
 \lambda_{3\pm}(k) &= \pm |k|
 \end{aligned}$$

donde hemos elegido un frame ortonormal $\{e_{ia} \mid i = 0, 1, 2, 3\}$ tal que $e_{0a} = u_a$ y $e_{1a} = \frac{1}{\sqrt{k^a k_a}} k_a$, e_{2a} , e_{3a} son espaciales. En este frame, la métrica de fondo luce como $g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

2) Veamos que la condición 2 del teorema 10 falla. Usando el mismo frame anterior y eligiendo el autovalor característico $\lambda_1 = 0$, el símbolo principal a lo largo de la línea $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$ es

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} l(\lambda)_a &= -\lambda \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a + \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} k_a \\ &= -\lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & nu_b & 0 \\ 0 & -1 & (p+\rho)u_b & 0 \\ 0 & 0 & -(\rho+p)g^a_b & 0 \\ 0 & 0 & qu_b + \sigma F_b^m u_m & -1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + |k| \begin{pmatrix} 0 & 0 & ne_{1b} & 0 \\ 0 & 0 & (p+\rho)e_{1b} & 0 \\ p_n e_1^a & p_\rho e_1^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qe_{1b} + \sigma F_b^m e_{1m} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos el kernel por derecha e izquierda de $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} l(\lambda = 0)_a$, este es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta W \\ \delta X \\ \delta Y_a \\ \delta Z \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{2a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{3a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(p+\rho) \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta \rho \\ \delta u^b \\ \delta q \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_\rho \\ p_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta u^b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

con $e_{1b} \delta u^b = 0$ y $\delta u^b F_b^m e_{1m} = 0$. Entonces, siguiendo la ecuación (3.18) tenemos

$$L_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\rho+p)\delta u^a e_{2a} \\ 0 & 0 & -(\rho+p)\delta u^a e_{3a} \\ 0 & -(rp_\rho + np_n) & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente $L_i^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^i = 0$. Por lo tanto el sistema es débilmente hiperbólico y no

existe ningún hiperbolizador.

Para realizar este calculo elegimos $n_a = u_a$, es fácil ver que la condición 2 todavía falla para cualquier elección temporal de n_a , donde por temporal nos referimos, a temporal en las dos métricas $g^{ab} n_a n_a < 0$ y $g_1^{ab} n_a n_a < 0$. Además, si elegimos n_a fuera de alguno de esos conos, los autovalores generalizados se vuelven complejos y perdemos la hiperbolicidad. Por lo que este sistema no admite ninguna hiperbolización.

3.4.3.1. Caso sin conductividad $\sigma = 0$.

Finalmente, cuando la conductividad se anula $\sigma = 0$, el kernel del sistema cambia y el mismo se vuelve fuertemente hiperbólico. No realizaremos el calculo completo de hiperbolicidad fuerte. Solo comprobaremos que el problema del caso con conductividad finita desaparece. Para ello calcularemos L_i^j sobre la misma linea $l(\lambda)_a$, del caso anterior, y verificando que ahora L_i^j no tiene kernel.

Considerando esta linea $l(\lambda)_a$ en $\lambda = 0$, las nuevas bases de los kernels por izquierda y derecha son

$$\begin{pmatrix} \delta W \\ \delta X \\ \delta Y_a \\ \delta Z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{2a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{3a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(p+\rho) \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ -(p+\rho) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta \rho \\ \delta u^b \\ \delta q \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_\rho \\ p_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_2^a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_3^a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Notemos que estos kernels, aumentan en 1 su dimensión con respecto al caso anterior.

De este modo

$$L_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\rho+p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\rho+p) \\ 0 & -((p+\rho)p_\rho + np_n) & 0 & 0 \\ -(p+\rho) & -p_n q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando su determinante, vemos que

$$\det L_i^j = -(p+\rho)^4 \left(\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_\rho \right) \neq 0$$

Por lo tanto $p+\rho \neq 0$ y $\frac{n}{(\rho+p)} p_n + p_\rho \neq 0$. Como explicamos antes, la primer condición es una condición necesaria para que $\mathfrak{N}_{fluid}^{Aa} n_a$ no tenga kernel por derecha y la segunda limita la posibilidad que la velocidad de propagación de las ondas acústicas se anulen. Para concluir completamente el resultado de hiperbolicidad fuerte, debemos completar el calculo de kernels y chequear algunas condiciones de suavidad en el simetrizador, que no haremos aquí. Por lo que concluimos la prueba.

3.5. Conclusiones.

En este capitulo hemos presentado una condición necesaria que una teoría cuasi-lineal de primer orden en las derivadas y con vínculos diferenciales, debe cumplir para que el sistema admita un hiperbolizador. Si esta condición, que es fácil de computar, no se

cumple, entonces la misma no tiene un conjunto de ecuaciones de evolución fuertemente hiperbólicas.

Para encontrar esta condición introducimos la descomposición en valores singulares de familias 1-paramétricas del símbolo principal y estudiamos perturbaciones al rededor de puntos donde el símbolo tiene kernel. Probamos que si esas perturbaciones, que se anulan en esos puntos, son de orden 2 o mas grandes, entonces no existe hiperbolizador para el sistema, ver teorema 11. Hemos observado que esta idea se relaciona con alguna condición de ortogonalidad entre ciertos espacios vectoriales (ver ejemplo a continuación de la prueba del teorema 14), en el siguiente capítulo formalizaremos esta idea.

Como un resultado extra, mostramos que una matriz cuadrada tiene un l -bloque de Jordan si y solo si, su versión perturbada en el parámetro ε tiene un valor singular de orden $O(\varepsilon^l)$, ver teorema 16. Este resultado puede ser extendido a matrices rectangulares. En el próximo capítulo introduciremos la descomposición de Kronecker y veremos como un valor singular de orden $O(\varepsilon^l)$ permite detectar la presencia de un l -bloque de Jordan dentro de esta nueva descomposición.

También mostramos que aunque la SVD depende de dos productos internos, los ordenes asintóticos de sus valores singulares son independientes de estos productos internos, por lo tanto, esos ordenes capturan intrínsecamente la estructura del sistema.

Cuando el sistema tiene vínculos diferenciales, su símbolo principal es un operador rectangular, por lo que en principio no es simple calcular su estructura característica. Hemos propuesto una forma de calcularla, conectando el kernel del operador con la nulidad de sus valores singulares, ver Lema 9.

Hemos aplicado esos resultados a algunos ejemplos: una matriz de 2×2 para la cual hemos estudiado su forma de Jordan usando los valores singulares perturbados. El segundo ejemplo es la electrodinámica de Forces Free en términos de los potenciales de Euler, escrita en primer orden en derivadas y con vínculos diferenciales. Usando nuestros resultados hemos comprobado que no existe una hiperbolización para el sistema, siendo el mismo débilmente hiperbólico. Realizamos este calculo de dos formas diferente. Primero calculamos sus valores singulares y mostramos que en un punto en particular, uno de ellos es de orden $O(\varepsilon^2)$. Como segunda opción, calculamos el termino de primer orden en la expansión de Taylor usando los kenels por derecha e izquierda del símbolo principal, ver teorema 19. Con esta segunda opción solo podemos concluir que el valor singular perturbado es de orden $O(\varepsilon^l)$ con $l \geq 2$. Sin embargo, esto es suficiente para decir que el sistema es débilmente hiperbólico. En general, es difícil calcular los valores singulares, por lo tanto la segunda opción simplifica de manera considerable el estudio de hiperbolicidad fuerte.

El último ejemplo es un fluido cargado con conductividad finita. En este caso, es suficiente considerar la parte de los fluidos que desacopla (por lo menos a nivel de símbolo principal) de la parte electromagnética. Mostramos que el sistema no admite una hiperbolización cuando la conductividad esta presente. Sin embargo el sistema resulta fuertemente hiperbólico en el caso de conductividad nula.

Capítulo 4

Condiciones Necesarias y suficientes para hiperbolicidad fuerte.

4.1. Introducción

En este capítulo estudiamos el sistema de coeficientes constantes descrito en la sección 2.4. Todo este capítulo esta basado en nuestro trabajo [3]. Consideremos el sistema (reescribiremos algunas expresiones)

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \partial_a \phi^\gamma = 0 \quad (4.1)$$

con \mathfrak{N}_γ^{Aa} constante y tal que $e \geq u$. Donde fijando las coordenadas $x^a = (t, x^i)$ y tomando su transformada de Fourier en las coordenadas espaciales obtenemos

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a \partial_t \hat{\phi}^\gamma + i \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a \hat{\phi}^\gamma = 0 \quad (4.2)$$

con $n_a = \nabla_a t$.

En este capítulo damos condiciones necesarias y suficientes (teorema 21) para que exista una hiperbolización h_A^α de tal forma que el sistema

$$h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a \partial_t \hat{\phi}^\gamma + i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a \hat{\phi}^\gamma = 0 \quad (4.3)$$

o lo que es lo mismo

$$\partial_t \hat{\phi}^\alpha = -i A_\beta^{\alpha a} k_a \hat{\phi}^\beta \quad (4.4)$$

con

$$A_\beta^{\alpha a} k_a := \left((h \mathfrak{N})^{-1} \right)_\gamma^\alpha h_A^\gamma \mathfrak{N}_\beta^{Aa} k_a \quad (4.5)$$

sea fuertemente hiperbólico según la definición 3. Además mostramos como construir explícitamente hiperbolizaciones h_A^α . Debido a que estamos en la versión en Fourier, ec. (4.3), permitimos reducciones que no solo sean combinaciones lineales de las ecuaciones

originales, sino aquellas que son pseudo-diferenciales, es decir, reducciones $h_A^\alpha(\hat{k})$ que dependen explícitamente de la direcciones de Fourier \hat{k} . Existe en la literatura una muy amplia gama de referencias sobre operadores pseudo-diferenciales, algunas de ellas son [8, 21, 41, 42, 23, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52], etc

La teoría que vamos a desarrollar acá puede ser mas general, pero nos restringimos al caso de coeficientes constantes ya que nos permite hacer afirmaciones y pruebas mas simples. Sin embargo todo lo desarrollado en este capítulo aplica a sistemas cuasi-lineales. Es decir, solo lidiamos con los problemas algebraicos, las condiciones de suavidad extras necesarias para una teoría mas general no son consideradas.

Como se explico en la sección 2.3, en esta clase de sistema esperamos soluciones en términos de exponenciales (onda planas). Por lo que si proponemos $\hat{\phi}^\gamma(t, x) = \delta\phi^\gamma e^{i(-\lambda n_a)t}$ como solución de (4.2), obtenemos el sistema

$$0 = \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a \delta\phi^\gamma = (-\lambda \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a + \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a) \delta\phi^\gamma \quad (4.6)$$

¹con $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$. Donde $-\lambda \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a + \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} k_a$ es llamado el matriz pencil [53]. La estructura de esta ecuación (y por lo tanto de las ecuaciones diferenciales) y sus soluciones son simplificadas usando la descomposición de Kronecker (ver [54], [55]). Es decir, esta descomposición, nos permite reconocer bloques asociados a la evolución de los campos físicamente relevantes, bloques de Jordan, y bloques asociados a los vínculos diferenciales, llamados L_m^T con $m \geq 0$. Estos últimos admiten diferentes reducciones, que nos permiten elegir las velocidades características que queramos para los modos asociados. Una técnica similar a la nuestra es usada en [56] para el caso 1+1.

En general, La descomposición de Kronecker tiene mas de dos tipos de bloques, pero las condiciones de hiperbolicidad (ver definición 8) los limitan a los dos mencionados. Por otro lado veremos que el teorema 10 restringe los bloques de Jordan a solo versiones diagonales de los mismos.

Por ultimo, para ilustrar el poder de nuestra teoría, presentamos como ejemplo de aplicación (ver sección 4.4), la teoría de Klein Gordon en su forma en derivadas primeras. Obtendremos su descomposición de Kronecker y mostraremos sus hiperbolizadores.

4.2. Resultados

En esta sección presentamos dos teoremas. El primero se incorpora al mencionado teorema de Kreiss (caso sin vínculos) y agrega una equivalencia más a la lista de la definición 3. La característica nueva que se incorpora en el mismo, es que se introduce la noción de ángulos entre subespacios vectoriales, también llamados ángulos canónicos o ángulos principales (introducciones a este tema puede verse en [57] y [58]). Estos ángulos principales son cantidades geométricas que miden la cercanía entre dos subespacios vectoriales. El segundo teorema es una generalización de esta idea al caso con vínculos, en

¹Notemos que esta ecuación también fue obtenida tomando un limite de alta frecuencia, para sistemas cuasi-lineales, en la sección 2.6.

donde se presentan condiciones necesarias y suficientes para garantizar la hiperbolicidad fuerte del sistema.

Arrancamos considerando el caso sin vínculos donde $A_\gamma^{\alpha a} k_a$ viene dado por la ecuación (2.15). Llamamos $\tau_i(k)$ con $i \in F_{(k)} = \{1, \dots, w_{(k)}\}$ a los diferentes autovalores de $A_\gamma^{\alpha a} k_a$, y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$, $(\Upsilon_L^{\tau_i(k)})'$ a sus correspondientes autoespacios² por derecha e izquierda³. Finalmente llamamos $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ al subespacio que se obtiene de subir los índices de los co-vectores de $(\Upsilon_L^{\tau_i(k)})'$ con la métrica $G^{\alpha\beta}$. Ya que $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$ son ahora subespacios de Φ_R , y tenemos la métrica $G_{\alpha\beta}$ positiva definida, podemos introducir ángulos entre estos subespacios. Los mismos se encargan de medir que tan cerca se encuentran el uno del otro. La cantidad de ángulos es igual a la menor dimensión entre los dos subespacios involucrados. En este caso hay $r_{\tau_i(k)}$ ángulos principales entre $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$, ya que $r_{\tau_i(k)} := \dim \Upsilon_L^{\tau_i(k)} = \dim \Phi_R^{\tau_i(k)}$.

Introducimos el primer teorema, cuya prueba se encuentra en el apéndice C. Un resultado de Strang [20] sobre cotas de los autoespacios es necesario para probarlo.

Teorema 20 *El sistema (2.17) es fuertemente hiperbólico si y solo si este es hiperbólico con respecto a algún n_a , y para todo $i \in F_{(k)}$ y todo k_a tal que $k_a t^a = 0$, con $|k| = 1$, existe una constante $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ tal que los ángulos entre $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$ son menores a este.*

La forma en la que se calculan los ángulos es la siguiente. Para cada $\tau_i(k)$, los cosenos de esos ángulos son los $r_{\tau_i(k)}$ valores singulares⁴ de la matriz cuadrada

$$(T^{\tau_i(k)})_j^i = v^{i\alpha} G_{\alpha\gamma} \delta \phi_j^\gamma \quad (4.7)$$

donde $\{v^{i\alpha} \in \Upsilon_L^{\tau_i(k)}\}$ y $\{\delta \phi_j^\gamma \in \Phi_R^{\tau_i(k)}\}$, con $i, j \in F_{(k)}$, son bases ortonormales de cada subespacio.

Usando este resultado previo como guía, retomamos el caso con vínculos $e \geq u$. Consideraremos el kernel por izquierda del símbolo principal $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda_i)_a$, y lo proyectaremos usando $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a G^{\gamma\beta}$ para poder compararlo con el kernel por derecha, es decir, calcular los ángulos entre estos dos subespacios.

Fijemos un n_a tal que el sistema es hiperbólico y consideremos la línea $l(\lambda)_a \in S_{n_a}$. El número y la multiplicidad geométrica (la dimensión del kernel por derecha) de los autovalores generalizados depende de k_a . Entonces, para cada k_a llamamos $\lambda_i(k)$ con $i \in D_{(k)} := \{1, 2, \dots, q_{(k)}\}$ a los diferentes autovalores generalizados y $r_{\lambda_i(k)}$ a la multiplicidad geométrica⁵ correspondiente a cada $\lambda_i(k)$. Notemos que en el caso cuasi-lineal $\lambda_i(k)$, $q_{(k)}$ y $r_{\lambda_i(k)}$ pueden depender de los puntos del espacio tiempo x y de los campos ϕ^α ; ya que estamos en el caso de coeficientes constantes esta dependencia no aparece.

²De ahora en adelante el espacio dual a algún espacio vectorial es denotado con el símbolo $'$.

³ $\delta \phi^\gamma$ es autovector por derecha, asociado al autovalor τ_i , si $(-\tau_i \delta_\gamma^\alpha + A_\gamma^{\alpha a} k_a) \delta \phi^\gamma = 0$ y X_α es autovector por izquierda, también asociado al autovalor τ_i , si $X_\alpha (-\tau_i \delta_\gamma^\alpha + A_\gamma^{\alpha a} k_a) = 0$.

⁴La métrica que usamos para definir los valores singulares es $G_{2ij} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ y su inversa.

⁵Obsérvese que se cambió la notación con respecto al capítulo anterior.

Llamamos $\Psi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ a los kernels por izquierda y derecha del símbolo principal, asociados a los autovalores generalizado $\lambda_i(k)$. Ellos tienen dimensiones $\dim \Psi_L^{\lambda_i(k)} = r_{\lambda_i(k)} + e - u$ y $\dim \Phi_R^{\lambda_i(k)} = r_{\lambda_i(k)}$. Usando $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a$ mapeamos $\Psi_L^{\lambda_i(k)}$ en Φ'_R (el espacio dual a Φ_R), y lo llamamos $(\Phi_L^{\lambda_i(k)})'$. No es posible saber, en forma genérica, su dimensión. Pero ya que $\dim(\ker \text{izq}(\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a)) = e - u$ podemos acotarla $r_{\lambda_i(k)} \leq \dim(\Phi_L^{\lambda_i(k)})' \leq e - u + r_{\lambda_i(k)}$.

Con estas definiciones, el teorema 11 de la sección anterior es resumido de la siguiente forma⁶

$$(\Phi_L^{\lambda_i(k)})' \Big|_{\Phi_R^{\lambda_i(k)}} = (\Phi_R^{\lambda_i(k)})'. \quad (4.8)$$

Consideremos ahora el subespacio obtenido de subir los índices de los co-vectores de $(\Phi_L^{\lambda_i(k)})'$ con $G^{\alpha\gamma}$, y llamemos a ese subespacio $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$. Notemos que $\Phi_L^{\lambda_i(k)} \subset \Phi_R$ por lo que es posible definir ángulos entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$. Para cada $\lambda_i(k)$ y k_a llamamos $\theta_j^{\lambda_i(k)}$ con $j \in I_{\lambda_i(k)} := \{1, \dots, r_{\lambda_i(k)}\}$ a esos ángulos. Estas cantidades geométricas son la respuesta a nuestro problema.

Teorema 21 *El sistema de coeficientes constantes (4.1) es fuertemente hiperbólico (admite al menos un hiperbolizador), si y solo si, este es hiperbólico con respecto a alguna dirección n_a , y para todo $i \in D_{(k)}$, todo k_a , con $t^a k_a = 0$ y $|k| = 1$, existe un ángulo constante máximo $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$.*

La condición (4.8) implica que para cada k_a existe una métrica tal que los ángulos principales entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ son todos nulos, esto nos garantiza que podemos encontrar una reducción h_A^α tal que $A_{\beta}^{\alpha a} k_a$ definido como en la ec. (4.5) es diagonalizable y con autovalores reales. Sin embargo, esto no es suficiente para garantizar hiperbolicidad fuerte, ya que para ello necesitamos garantizar la diagonalización uniforme de $A_{\beta}^{\alpha a} k_a$. La forma en la cumplimos esta condición es pidiendo que los ángulos principales $\theta_j^{\lambda_i(k)}$ estén acotados superiormente por ϑ donde los mismos son definidos con un producto interno global $G_{\alpha\beta}$ (independiente de k).

Escrito en terminos de los cosenos de los ángulos, esto es una cota inferior

$$\min_{i \in D_{(k)} \ j \in I_{\lambda_i(k)} \ |k|=1} \cos \theta_j^{\lambda_i(k)} \geq \cos \vartheta > 0 \quad (4.9)$$

para todo k tal que $t^a k_a = 0$.

Los ángulos principales se calculan igual que antes. Usando bases ortonormales de los espacios $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ construimos la matriz $(T^{\tau_i(k)})_j^I$ que resulta de la contracción de esas bases con la métrica $G_{\alpha\beta}$ y sus valores singulares⁷ son los cosenos de los ángulos.

⁶Sea $\{u_i^\alpha\}$ base de $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ y $\{X_\alpha^j = X_A^j \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a\}$ base de $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$. Dado que por teorema 19, $L_i^j := X_A^j \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} n_a u_i^\alpha$ no tiene kernel por derecha, podemos cambiar las bases de modo tal que $L_i^j = \begin{pmatrix} \delta_n^m \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $\delta_n^m \in \mathbb{R}^{r_{\lambda_i(k)} \times r_{\lambda_i(k)}}$ es la matriz identidad (esto se puede hacer de forma simple usando la SVD de L). En estas bases $G_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ y concluimos la ecuación (4.8).

⁷Usando métricas $G_{1IJ} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ y $G_{2ij} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ para definir la adjunta.

Notemos que la matriz es en general rectangular, ya que una base de $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ tiene $r_{\lambda_i(k)}$ o mas elementos.

Asumiendo que la condiciones del teorema 21 valen, mostraremos como construir reducciones h_A^α de tal forma que la degeneración de los autovalores generalizados no cambie, y los nuevos autovalores (introducidos por h_A^α) puedan ser elegidos simples y diferentes a los del sistema completo. Esas reducciones estarán de acuerdo con las hipótesis del teorema y nos permitirán concluir la prueba.

4.3. Prueba del teorema 21.

La prueba del teorema esta dividida en 5 subsecciones. En la subsección 4.3.1 introducimos la descomposición de Kronecker del símbolo principal. En la subsección 4.3.2, probamos el lema 22. El mismo asegura que las hipótesis de nuestro teorema 21 implican la valides del teorema 10 (del capitulo anterior). En la subsección 4.3.3, probamos el Lema 23. Este es conjunto de equivalencias de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de reducciones h_A^α que conduzcan a $A_\gamma^{\alpha a} k_a$ diagonalizables, donde se muestra explícitamente las posibles formas de h_A^α . En la subsección 4.3.4 presentamos el Lema 24. Este muestra que es posible encontrar reducciones tal que los autovalores extras (agregados por la reducción) de $A_\gamma^{\alpha a} k_a$, las velocidades de propagación de los vínculos, pueden ser elegidos simples y diferentes a las velocidades de propagación físicas de todo el sistema. Finalmente en la subsección 4.3.5, restringimos el tipo de reducciones para que los ángulos entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$, $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ y $\Upsilon_L^{\lambda_i(k)}$, $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ sean los mismos. De este modo, aplicando el teorema 20 a el sistema reducido concluimos la prueba.

4.3.1. Descomposición de Kronecker de pencils.

Consideremos el símbolo principal o matriz pencil

$$\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b = \lambda \left(-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b \right) + \left(\mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b \right) \quad (4.10)$$

para n_a fijo y tal que $l(\lambda)_b = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$ con $k_a t^a = 0$ y $|k| = 1$. En todo lo que sigue, siempre consideraremos k_a de este modo. La estructura de este matriz pencil viene dada como mencionamos antes por la descomposición de Kronecker [54], [55]. Esta consiste de cambios de bases del espacio de campos y del espacio de ecuaciones, que dependen de k_a y n_a , pero que son independientes del parámetro λ . Estas nuevas bases transforman el símbolo (4.10) en bloques simples. Debido a que $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b$ no puede tener kernel por derecha por la condición de hiperbolicidad (definición 8), los bloques permitidos son solo dos, llamados:

a) $J_m(\lambda_i)$ —bloques de Jordan:

$$J_m(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

con λ_i los autovalores generalizados del sistema;

b) L_m^T – bloque con $m \geq 0$:

$$L_m^T = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda & 0 & 0 & 0}^m \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+1 \times m}$$

c) el caso L_0^T es una fila nula, lo incluimos como uno de los L_m^T para simplificar notación. Además, una fila L_0^T representa que los vínculos no son todos independientes, por lo menos a nivel de parte principal.

Un ejemplo simple

$$\mathfrak{N}_{\eta}^{Ab l}(\lambda)_b = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{11 \times 7} \quad (4.11)$$

En general la descomposición de Kronecker incluye otros bloques (ver apéndice B de [3]), que aparecen cuando $\mathfrak{N}_{\eta}^{Ab} n_b$ tiene kernel por derecha. Creemos que estos bloques están relacionados a libertades de gauge.

La estructura de Kronecker es única, sin embargo, en general existen diferentes bases que conducen a la misma estructura. En el apéndice D mostramos como encontrar los diferentes bloques de $\mathfrak{N}_{\eta}^{Ab l}(\lambda)_b$.

Es importante mencionar que la mayoría de los sistemas físicos tiene solo bloques L_1^T y L_0^T . Algunos ejemplos son la Electrodinámica de Maxwell, Electrodinámica no lineal, Electrodinámica de Force Free, fluidos ideales, relatividad general, etc. De hecho, la definición de los campos de Geroch C_A^a (ver sección 2.2) son todos del tipo L_0^T y L_1^T . Comentaremos mas sobre esto en el capítulo 6.

4.3.2. Condición necesaria para hiperbolicidad fuerte.

La descomposición de Kronecker de $\mathfrak{N}_{\eta}^{Bbl}(\lambda)_b$ (para cada $l(\lambda)_b = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$) muestra que el kernel por izquierda del mismo, llamado Ψ_L^{λ} , es expandido por un conjunto

de $c = e - u$ vectores $\chi_A^s(\lambda)$ donde $s \in C_\chi = \{1, \dots, e - u\}$ para cualquier λ , y que este aumenta cuando $\lambda = \lambda_i(k)$. Llamamos autovectores generalizados a los nuevos $r_{\lambda_i(k)}$ vectores $\left\{ (v_{\lambda_i}^l)_A \right\}$ con $l \in I_{\lambda_i(k)} := \{1, \dots, r_{\lambda_i(k)}\}$ necesarios para completar una base de $\Psi_L^{\lambda_i}$. Entonces, para cada $\lambda = \lambda_i(k)$,

$$\Psi_L^{\lambda_i(k)} = \text{expan}\{(\chi_{\lambda_i}^s)_A, (v_{\lambda_i}^l)_A\} \text{ con } s \in C_\chi \text{ y } l \in I_{\lambda_i(k)} \quad (4.12)$$

donde $(\chi_{\lambda_i}^s)_A := \chi_A^s(\lambda_i(k))$.

Por otro lado, $\mathfrak{N}_{\eta}^{Bbl}(\lambda)_b$ solo tiene kernel por derecha cuando $\lambda = \lambda_i(k)$, este subespacio es llamado $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ y es tal que

$$\Phi_R^{\lambda_i(k)} = \text{expan}\{(\delta\phi_j^{\lambda_i})^\alpha\} \text{ con } j \in I_{\lambda_i(k)} \quad (4.13)$$

Notemos que $\dim \Psi_L^{\lambda_i(k)} = e - u + r_{\lambda_i(k)}$ y $\dim \Phi_R^{\lambda_i(k)} = r_{\lambda_i(k)}$.

Como fue estudiado en el capítulo anterior, si consideraremos las líneas dos paramétrica $l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a = -\varepsilon e^{i\theta} n_a + l(\lambda)_a$ con ε real, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$ tenemos que

$$\sigma_{u+1-j} \left[\mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda_i(k))_a \right] = (\xi_{\lambda_i(k)})_j \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{con } j \in I_{\lambda_i(k)} \quad (4.14)$$

⁸donde $(\xi_{\lambda_i(k)})_j$ son los valores singulares de

$$\left(\tilde{L}^{\lambda_i(k)} \right)_m^I = \begin{pmatrix} (\hat{v}_{\lambda_i}^l)_A \\ (\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)_A \end{pmatrix} \mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} n_b \left(\widetilde{\delta\phi_m^{\lambda_i}} \right)^\alpha$$

(ver ec. 3.19) con $I = (l, s)$, y $\left\{ (\hat{v}_{\lambda_i}^l)_A, (\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)_A \right\}$ es una base ortonormalizada con respecto a $G^{AB} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, de $\Psi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\left\{ \left(\widetilde{\delta\phi_m^{\lambda_i}} \right)^\alpha \right\}$ es una base ortonormalizada con respecto a $G_{\alpha\gamma} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, de $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$.

Como vimos en el Teorema 10 una condición necesaria para la hiperbolicidad fuerte del sistema es que los valores singulares de $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda_i(k))_a$ sean de orden $O(\varepsilon^0)$ o $O(\varepsilon^1)$, esto es equivalente a que ninguno de los $(\xi_{\lambda_i(k)})_j$ se anule. Por lo que en el Lema siguiente mostramos que la hipótesis (4.9), en el teorema 21, implica que los $(\xi_{\lambda_i(k)})_j > 0$ para todo j .

Lema 22 Para todo $i \in D(k)$, $j \in I_{\lambda_i(k)}$, con k_a tal que $k_a t^a = 0$ y $|k| = 1$, si la ecuación (4.9) vale, entonces $(\xi_{\lambda_i(k)})_j > 0$.

Prueba. Recordemos que $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ es el mapeo de $\Psi_L^{\lambda_i(k)}$ en Φ_R , usando $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} n_a G^{\alpha\gamma}$, por lo que este subespacio es expandido por el siguiente conjunto $(\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma := (\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)_A \mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} n_a G^{\alpha\gamma}$ y $(\hat{v}_{\lambda_i}^l)^\gamma := (\hat{v}_{\lambda_i}^l)_A \mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} n_a G^{\alpha\gamma}$, es decir,

$$\Phi_L^{\lambda_i(k)} = \text{expan}\{(\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma, (\hat{v}_{\lambda_i}^l)^\gamma\} \text{ con } s \in C_\chi \text{ y } l \in I_{\lambda_i(k)}. \quad (4.15)$$

⁸Recordemos que los valores singulares son ordenados tal que $\sigma_1 [\mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda_i(k))_a] \geq \sigma_2 [\mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda_i(k))_a] \geq \dots \geq \sigma_u [\mathfrak{N}_{\alpha}^{Ab} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda_i(k))_a]$.

Notemos que pueden haber vectores linealmente dependientes entre los $(\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma$, por lo que ellos deberían ser removidos hasta obtener una base. Sin embargo, vamos a asumir que todos los $(\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma$ son linealmente independientes y después trataremos el otro caso. Para calcular los ángulos principales $\theta_k^{\lambda_i(k)}$ entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ necesitamos ortonormalizar (en la métrica $G_{\alpha\gamma}$) la base mostrada en (4.15), llamamos $\{(\tilde{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma, (\tilde{v}_{\lambda_i}^l)^\gamma\}$ a esta nueva base. Dado que es un cambio de base, existe una matriz Q_I^J , con $J = (s, l)$ y $I = (m, n)$, invertible, tal que conecta las dos bases del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma \\ (\tilde{v}_{\lambda_i}^l)^\gamma \end{pmatrix} = Q_I^J \begin{pmatrix} (\hat{\chi}_{\lambda_i}^m)^\gamma \\ (\hat{v}_{\lambda_i}^n)^\gamma \end{pmatrix}$$

De este modo, los cosenos de los ángulos $\cos \theta_k^{\lambda_i(k)}$ entre $\Phi_L^{\lambda_i(k)}$ y $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ son los valores singulares de la matriz

$$\left(T^{\lambda_i(k)}\right)_j^J = \begin{pmatrix} (\tilde{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma \\ (\tilde{v}_{\lambda_i}^l)^\gamma \end{pmatrix} G_{\gamma\eta} \left(\widetilde{\delta\phi}_m^{\lambda_i}\right)^\eta = Q_I^J \left(\tilde{L}^{\lambda_i(k)}\right)_j^I \quad (4.16)$$

Ya que estos cosenos no se anulan por hipótesis (eq. (4.9)), entonces los valores singulares de $\tilde{L}^{\lambda_i(k)}$ no pueden anularse (tendría kernel por derecha de ser así), como queríamos mostrar.

Si ahora los vectores $\{(\hat{\chi}_{\lambda_i}^s)^\gamma\}$ son linealmente dependientes, y elegimos un subconjunto linealmente independiente de ellos, y realizamos el mismo proceso de recién. Encontramos una ecuación equivalente a (4.16), donde ahora existe una nueva matriz Q_I^J que ya no es cuadrada ($\dim I \geq \dim J$). Usando el mismo argumento que antes concluimos la prueba. ■

4.3.3. Construyendo reducciones.

En esta sección probamos el Lema 23 que tiene una serie de condiciones equivalentes y además mostramos explícitamente como construir, usando la descomposición de Kronecker del símbolo principal, reducciones generales h_A^α que llevan a $A_{\beta}^{\alpha a} k_a$ diagonalizables. Es importante notar que si $\mathfrak{N}_{\eta}^{Ab} l(\lambda)_b$ tiene un J_m -bloque de Jordan con $m \geq 2$, entonces el sistema es intrínsecamente mal puesto (si es hiperbólico, entonces será débilmente hiperbólico). Sin embargo, si esos bloques no aparecen, esta condición todavía no es suficiente ya que otros problemas pueden aparecer. Uno de ellos, es que la reducción de los bloques L_m puede introducir bloques de Jordan no diagonales. En general esta clase de reducciones dan un sistema subsidiario de los vínculos mal puesto. El otro problema ya lo mencionamos y es que $A_{\beta}^{\alpha a} k_a$ no sea uniformemente diagonalizable. En esta sección solo lidiamos con el primer problema.

Lema 23 *Sea el sistema (4.1) hiperbólico en n_a , entonces las siguientes condiciones son equivalentes: Para cada línea $l(\lambda)_b = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$*

i) Existe una reducción h_A^α , tal que $A_{\gamma}^{\alpha a} k_a$ es diagonalizable.

ii) La descomposición de Kronecker del símbolo principal $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} l(\lambda)_a$ tiene todos sus bloques de Jordan de dimensión 1.

iii) La SVD de $\mathfrak{N}_\alpha^{Aa} l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a$ a lo largo de las líneas extendidas $l_{\varepsilon, \theta}(\lambda)_a$ (ver sección 3.2) solo tiene valores singulares de ordenes $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$. Es decir, $(\xi_{\lambda_i(k)})_j > 0$ para todo $i \in D(k) = \{1, 2, \dots, q(k)\}$, y $j \in I_{\lambda_i(k)} = \{1, 2, \dots, r_{\lambda_i(k)}\}$.

Prueba. La descomposición de Kronecker del símbolo principal es

$$\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b = \lambda \left(-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b \right) + \left(\mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b \right) \quad (4.17)$$

$$= Y_B^A(x, \phi, n, k) K_\alpha^B(\lambda) W_\eta^\alpha(x, \phi, n, k) \quad (4.18)$$

donde $l(\lambda)_b = -\lambda n_b + k_b \in S_{n_a}$. Y, W son operadores invertibles⁹ y

$$K_\alpha^B(\lambda) := \lambda I_\alpha^B + M_\alpha^B$$

es la matriz de Kronecker. Esta es una matriz con $J_m(\lambda_i)$ –bloques de Jordan, L_i^T –bloques y L_0^T –filas nulas. Las matrices I y M son únicas (salvo reacomodamientos de los bloques), pero en general pueden cambiar para diferentes valores de (n, k) ¹⁰, sin embargo esto no suele suceder en los ejemplos físicos estándar. Por otro lado, para (n, k) fijos, generalmente Y y W no son únicos. Además, ninguna de las matrices Y, W, I, M depende de λ . Notemos que

$$-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b = Y_B^A I_\alpha^B W_\eta^\alpha \text{ y } \mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b = Y_B^A M_\alpha^B W_\eta^\alpha.$$

$ii \Rightarrow i$

Proponemos la siguiente reducción

$$h_C^\rho = S^{\rho\alpha} \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} (Y^{-1})_D^C \quad (4.19)$$

con S cualquier forma bilineal invertible y H otra forma bilineal que depende explícitamente de K . Mostramos como elegirla a continuación.

El sistema reducido queda

$$h_C^\rho \mathfrak{N}_\eta^{Cb} l(\lambda)_b = \lambda \left(S^{\rho\alpha} \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} I_\gamma^C W_\eta^\gamma \right) + \left(S^{\rho\alpha} \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} M_\gamma^C W_\eta^\gamma \right).$$

Asumiendo por un momento

a) $H_{\delta C} I_\alpha^C$ es una forma Hermitiana definida positiva y,

b) $H_{\delta C} M_\alpha^C$ es una forma Hermitiana.

⁹Los índices B y α de Y_B^A y W_η^α respectivamente, debería ser índices $\tilde{\alpha}$ y \tilde{B} , ya que ellos solo rotulan elementos de alguna base en sus respectivos espacios vectoriales. Sin embargo, los vamos a identificar con los índices sin sombrero (aunque no necesariamente exista una identificación natural) ya que $\dim \alpha = \dim \tilde{\alpha}$ y $\dim B = \dim \tilde{B}$. Esto no juega un papel importante en lo que sigue.

¹⁰ (x, ϕ, n, k) en el caso cuasi-lineal.

Concluimos que $\overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} I_\gamma^C W_\eta^\gamma$, y $\overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} M_\gamma^C W_\eta^\gamma$ son formas Hermitianas donde la primera es definida positiva. Invertiendo $S^{\rho\alpha} \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} I_\gamma^C W_\eta^\gamma$ y llamando a su inversa $\left((S\overline{W}HIW)^{-1}\right)_\tau^v$ vemos que

$$\begin{aligned} A_\eta^{va} k_a &= - \left((S\overline{W}HIW)^{-1}\right)_\tau^v \left(S^{\tau\alpha} \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} M_\gamma^C W_\eta^\gamma\right) \\ &= - (W^{-1})_\gamma^v \left((H_{\delta C} I_\gamma^C)^{-1}\right)^{\gamma\rho} H_{\delta C} M_\gamma^C W_\eta^\gamma. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Entonces $A_\eta^{va} k_a$ es Hermitizable (o simetrizable en el caso real) y por lo tanto diagonalizable y con autovalores reales. Notemos que S introduce grados de libertad en h_C^ρ , ya que en principio es libre, pero no juega ningún papel relevante en $A_\eta^{va} k_a$, puesto que se cancela.

Entonces, si asumimos la hipótesis ii (que no lo hicimos hasta ahora) y encontramos H tal que se satisfagan a) y b) habremos probado que $ii \Rightarrow i$.

Construyamos $H_{\delta C}$. Proponemos un H para cada uno de los bloques de $K_\eta^A(\lambda)$. Consideremos los bloques de Jordan diagonales primero, con autovalores reales por la condición de hiperbolicidad. Si tenemos un $J_m(\lambda_i)$ —bloque de Jordan elegimos H_{Id_m} de $m \times m$ como cualquier matriz Hermítica definida positiva.

Consideremos ahora los bloques $(L_m^T)_j^i$ con $i = 1, \dots, m+1$, $j = 1, \dots, m$ y $m \geq 1$. Proponemos $(H_{L_m^T})_{si}$ con $s = 1, \dots, m$ de la siguiente forma

$$(H_{L_m^T})_{si} (L_m^T)_j^i(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

con todas sus componentes reales. Veamos que funciona.

Observemos que L_m^T puede ser dividida en dos partes $L_m^T = (\lambda I_{L_m^T} + M_{L_m^T})$ con

$$I_{L_m^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_{L_m^T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & \left(H_{L_m^T} \right)_{si} (L_m^T)_j^i (\lambda) \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix} \left(\lambda I_{L_m^T} + M_{L_m^T} \right) \\
 &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix} \\
 &= \lambda (g_m)_{\delta\alpha} + (l_m)_{\delta\alpha}
 \end{aligned}$$

con

$$(g_m)_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$(l_m)_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Notemos la forma en cascada de $H_{L_m^T}$ y que tanto g_m como l_m son simétricas. Esto es la elección mas general de $H_{L_m^T}$. Para cumplir la condiciones a) y b) solo resta mostrar que g_m puede ser elegida definida positiva, seleccionando los coeficientes de a_i . Probaremos esto por inducción en m . Cuando $m = 1$ la condición de positividad es $a_1 > 0$. Asumiendo la hipótesis inductiva: g_m es positivo definido, agrandamos la matriz Hermítica a g_{m+1} agregando una nueva columna y una nueva fila

$$(g_{m+1})_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} \\ a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & \dots \\ \dots & a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} & a_{2m} & a_{2m+1} \end{pmatrix}.$$

Aparecen solo dos nuevos coeficientes a_{2m} y a_{2m+1} , que no estaban en g_m . Entonces, tenemos que mostrar que los podemos seleccionar de tal forma que g_{m+1} sea definido positivo. Ya que g_m si lo es, y usando el criterio de Sylvester, solo tenemos que mostrar que $\det(g_{m+1}) > 0$. Expandiendo el mismo a lo largo de la última columna obtenemos

$$\det(g_{m+1}) = a_{2m+1} \det(g_m) + f(a_1, \dots, a_{2m}) > 0$$

donde f es alguna función que no depende de a_{2m+1} . Seleccionando a_{2m} la función $f(a_1, \dots, a_{2m})$ queda definida, y ya que $\det(g_m) > 0$, la condición de positividad de g_{m+1} se garantiza eligiendo a_{2m+1} tal que

$$a_{2m+1} > -\frac{f(a_1, \dots, a_{2m})}{\det(g_m)}.$$

Finalmente, para las filas nulas L_0^T , podemos elegir columnas de H arbitrarias. Estas no juegan ningún rol en las ecuaciones de evolución, sin embargo si lo hacen en la reducción h_A^α .

Un simple ejemplo de H es:

$$\begin{aligned} & (H)_{\delta A} K_\eta^A(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} H_{Id_{m_3}} & 0 & 0 & 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & H_{Id_{m_4}} & 0 & 0 & A_2 & B_2 \\ 0 & 0 & H_{L_{m_2}^T} & 0 & A_3 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & H_{L_{m_1}^T} & A_4 & B_4 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} Id_{m_3}(\lambda - \lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{m_4}(\lambda - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{m_2}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{m_1}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$= \begin{pmatrix} H_{Id_{m_3}} Id_{m_3}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{Id_{m_4}} Id_{m_4}(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{L_{m_2}^T} L_{m_2}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{L_{m_1}^T} L_{m_1}^T \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

donde Id_{m_i} son matrices identidades de $m_i \times m_i$, $H_{L_{m_1}^T}, H_{L_{m_2}^T}$ elegidas como en (4.21), $H_{Id_{m_3}}, H_{Id_{m_4}}$ matrices Hermitianas arbitrarias definidas positivas y A_i, B_i con $i = 1, 2, 3, 4$ bloques arbitrarios.

Como mencionamos antes, en el formalismo de Geroch que incluye a la mayoría de los ejemplos físicos, no hay L_m^T con $m \geq 2$, solo aparecen L_1^T y L_0^T . Estos tipos de bloques permiten además la introducción de reducciones mas generales, como mostramos a continuación. Consideremos un conjunto de bloques L_1^T

$$\begin{pmatrix} L_1^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1^T \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En estos casos, el H mas general posible tiene la forma,

$$\begin{aligned} \left(H_{L_1^T} \right)_{\delta A} &= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \bar{b}_2 & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_s & 0 \\ b_2 & 0 & b_{s+1} & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_{2s-1} & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ b_s & 0 & b_{2s-1} & 0 & \dots & 0 & b_{\frac{s(s+1)}{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_s \\ 0 & c_2 & 0 & c_{s+1} & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{2s-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & c_s & 0 & c_{2s-1} & 0 & \dots & 0 & c_{\frac{s(s+1)}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde,

$$\left(H_{L_1^T} \right)_{\delta A} \begin{pmatrix} L_1^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1^T \end{pmatrix} = \lambda (g_1)_{\delta\alpha} + (g_2)_{\delta\alpha},$$

tal que

$$(g_1)_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} b_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_s \\ b_2 & b_{s+1} & \dots & \bar{b}_{2s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_s & b_{2s-1} & \dots & b_{\frac{s(s+1)}{2}} \end{pmatrix} \quad (g_2)_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} c_1 & \bar{c}_2 & \dots & \bar{c}_s \\ c_2 & c_{s+1} & \dots & \bar{c}_{2s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & c_{2s-1} & \dots & c_{\frac{s(s+1)}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ya que ambas son Hermitianas, eligiendo g_1 definida positiva concluimos la prueba.

$ii \Leftrightarrow iii$

Como mostramos en el apéndice B, el orden de perturbación de los valores singulares de $\mathfrak{N}_{\alpha}^{Aa} l_{\varepsilon, \theta} (\lambda_i)_a$ es invariante ante cambios de base y elecciones de productos internos. Por lo que podemos elegir bases en las que $\mathfrak{N}_{\eta}^{Ab} l (\lambda)_b = K_{\alpha}^B (\lambda)$. Si en esas bases consideramos productos internos $G_{AB} = (1, \dots, 1)$ y $G_{\alpha\gamma} = (1, \dots, 1)$ el cálculo de los valores singulares se desacopla en bloques. Por lo que solo necesitamos chequear la forma de los valores singulares perturbados de $J_l (\lambda)$ y L_m^T .

Los l -bloques de Jordan son de orden $O(\varepsilon^l)$ por teorema 16, por lo tanto los valores singulares son de orden $O(\varepsilon^1)$ si y solo si los bloques de Jordan son de dimensión 1.

Por otro lado, los bloques L_m^T no tiene kernel por derecha para ningún λ , es decir, sus valores singulares perturbados son siempre de orden $O(\varepsilon^0)$. Para ver esto usamos la ecuación (3.5)

$$\begin{aligned} \det \left(((L_m^T)^*)^s (L_m^T)^i_j \right) &= \sigma_1^2 [L_m^T] \dots \sigma_m^2 [L_m^T] \\ &= \left(|\lambda|^2 \right)^m + \left(|\lambda|^2 \right)^{m-1} \dots + |\lambda|^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

donde los $\sigma_j [L_m^T]$ son los valores singulares de L_m^T , que nunca se anulan por la expresión anterior.

Como ejemplo

$$\det \left(\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (|\lambda|^2)^2 + (|\lambda|^2) + 1 > 0.$$

$i \Rightarrow iii)$

Esta implicación es exactamente el teorema 11. Con esto concluimos la prueba del Lema. ■

4.3.4. Eligiendo los autovalores extras.

En la prueba anterior hemos construido familias de reducciones que hacen el sistema Hermitizable, tal que

$$A_{\eta}^{\gamma b} k_b = \left((h_{\varepsilon}^{\varepsilon} \mathfrak{N}_{\delta}^{C_a} n_a)^{-1} \right)^{\gamma} h_B^{\alpha} \mathfrak{N}_{\eta}^{Bb} k_b \quad (4.26)$$

es diagonalizable con autovalores reales para todo k_a con $k_a t^a = 0$ y $|k| = 1$.

Notemos que si h_C^{ρ} es una de esas reducciones, entonces también lo es $\tilde{h}_B^{\gamma} = \left((h \mathfrak{N} n)^{-1} \right)^{\gamma}_{\alpha} h_B^{\alpha}$, ya que dan la misma matriz (4.26) (en este caso $\tilde{h}_B^{\gamma} \mathfrak{N}_{\alpha}^{B a} n_a = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, con δ_{α}^{γ} la matriz identidad). Cuando \tilde{h}_B^{γ} es escrita en términos de la descomposición de Kronecker (4.18) obtenemos

$$\tilde{h}_B^{\gamma} = - (W^{-1})_{\rho}^{\gamma} \left((HI)^{-1} \right)^{\rho \delta} H_{\delta C} (Y^{-1})_B^C, \quad (4.27)$$

con $\left((HI)^{-1} \right)^{\rho \delta}$ la inversa de $H_{\delta C} I_{\gamma}^C$.

Este \tilde{h}_B^{γ} no depende de la matriz S , mostrando que esos grados de libertad no juegan ningún rol en las reducciones. Vamos a usar reducciones \tilde{h}_B^{γ} de ahora en adelante¹¹. Recordemos que cuando una reducción es aplicada, el kernel del símbolo principal aumenta, este aumenta en m su dimensión por cada bloque L_m^T . Denotamos a los nuevos autovalores introducidos como $\{\pi_i(k)\}$. En principio, no podemos saber cuantos de ellos introducimos. Además dado que los L_m^T pueden cambiar cada cada k_a , los nuevos autovalores también pueden hacerlo. Sea como sea, esto siempre sucede con $A_{\eta}^{\gamma b} k_b$ diagonalizable y autovalores reales.

Lema 24 *Asumamos que se cumple cualquiera de las condiciones del Lema 23, entonces existe \tilde{h}_B^{γ} como en la ecuación (4.27) tal que:*

Para cada k_a , todos los $\pi_i(k)$ son diferentes entre ellos y diferentes de los autovalores generalizados $\lambda_i(k)$, es decir, son autovalores simples, de multiplicidad algebraica igual a 1.

¹¹El problema de estas reducciones \tilde{h}_B^{γ} es que puede ser mas complicado (que con h_B^{γ}) entender si produce ecuaciones de evolución covariantes.

Prueba. Consideremos la forma de \tilde{h}_B^γ en la ec. (4.27). El bloque $\tilde{H}_{L_m^T}$ asociado a L_m^T en este caso es

$$\tilde{H}_{L_m^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{m+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{a}_{2m} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{m+1} \\ \tilde{a}_{m+2} \\ \dots \\ \tilde{a}_{2m} \end{pmatrix} = g_m^{-1} \begin{pmatrix} a_{m+1} \\ a_{m+2} \\ \dots \\ a_{2m} \end{pmatrix}$$

donde g_m y a_i fueron definidos en la ec. (4.22). Entre todas las reducciones posibles estamos buscando aquellas para las cuales los autovalores de cada bloque son diferentes. Solo debemos elegir \tilde{a}_i de forma conveniente para que esto suceda. Notemos que si encontramos alguna reducción de este tipo, obtendremos que cada bloque reducido es diagonalizable. Esto significa que existen coeficientes a_i satisfaciendo la condición de positividad requerida en la subsección previa. Por lo que ya no los necesitaremos para el resto de la construcción.

Observemos que si $\mathfrak{N}_\eta^{Cbl}(\lambda)_b$ tiene un bloque L_m^T en su descomposición de Kronecker, entonces,

$$\begin{aligned} \det(\tilde{h}_C^\rho \mathfrak{N}_\eta^{Cbl}(\lambda)_b) &\propto \det(\tilde{H}_{L_m^T} L_m^T) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{m+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{a}_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \tilde{a}_{m+1} \\ 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{m+2} \\ 0 & \dots & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda + \tilde{a}_{2m} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^m + \tilde{a}_{2m} \lambda^{m-1} - \tilde{a}_{2m-1} \lambda^{m-2} + \dots - \tilde{a}_{m+3} \lambda^2 + \tilde{a}_{m+2} \lambda - \tilde{a}_{m+1} \end{aligned}$$

Eligiendo cualquier conjunto con m números reales diferentes, es fácil seleccionar los coeficientes \tilde{a}_i tal que esos números sean raíces del polinomio anterior. Esto concluye la construcción. ■

4.3.5. Cota inferior uniforme e hiperbolicidad fuerte.

Finalmente, con la ayuda de las reducciones \tilde{h}_B^γ (ec. (4.27)), vamos a usar el teorema 20 para concluir la prueba. Notemos que la reducción \tilde{h}_C^ρ depende de las bases usadas

en la descomposición de Kronecker, ya que depende de W e Y . Esas bases no son únicas, por lo que usaremos esta libertad para seleccionar \tilde{h}_C^ρ apropiadas.

El sistema reducido es

$$\tilde{h}_C^\rho \mathfrak{N}_\eta^{Cbl}(\lambda)_b = -\lambda \delta_\eta^\rho + A_\eta^{\rho a} k_a = -\lambda \delta_\eta^\rho - (W^{-1})^\rho_\gamma \left((HI)^{-1} \right)^{\gamma\delta} H_{\delta C} M_\alpha^C W_\eta^\alpha, \quad (4.28)$$

donde todavía tenemos la libertad de elegir W para nuestra conveniencia.

Este sistema tiene kernel cuando $\lambda = \pi_i(k)$ y $\lambda = \lambda_i(k)$. Para poder aplicar el teorema 20, necesitamos calcular los cosenos de los ángulos $\cos \theta^{\pi_i(k)}$, $\cos \theta_j^{\lambda_i(k)}$ entre los kernels $\Upsilon_L^{\pi_i(k)}$, $\Phi_R^{\pi_i(k)}$ y $\Upsilon_L^{\lambda_i(k)}$, $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ respectivamente y mostrar que ellos están uniformemente acotados por debajo.

Ya que cada $\pi_i(k)$ es un autovalor simple de $A_\eta^{\rho a} k_a$, usando el teorema de la función implícita es posible mostrar que $\cos \theta^{\pi_i(k)}$ es continuo en k_a , y ya que k_a pertenece a conjunto compacto ($|k| = 1$), entonces $\cos \theta^{\pi_i(k)}$ alcanza su mínimo en ese conjunto. Estos son autovalores simples, por lo que sus cosenos no pueden anularse para ningún j (los correspondientes valores singulares perturbados deben ser de orden $O(\varepsilon^1)$), por lo tanto el mínimo posible tiene que ser positivo. Notemos que para esta conclusión no necesitamos información acerca de W .

Para finalizar la prueba, solo necesitamos calcular $\cos \theta_j^{\lambda_i(k)}$ para cada $\lambda_i(k)$. Notemos que si un λ_i es simple, entonces podemos usar el mismo argumento de arriba, por lo que los casos interesantes son cuando no tenemos bloques triviales. Dado que $\pi_i \neq \lambda_j$, el kernel por derecha $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ es invariante ante la aplicación de la reducción. Sin embargo el kernel por izquierda de (4.28), $\Upsilon_L^{\lambda_i(k)}$, depende de W . Por lo que necesitamos acomodar W , para que los ángulos que estamos buscando coincidan con los ángulos de la versión no reducida. Para ello, miramos el kernel por izquierda del sistema completo (de $\mathfrak{N}_\eta^{Cbl}(\lambda)_b$) llamado $\Psi_L^{\lambda_i}$. Este kernel tiene un subespacio invariante cuya dimensión es independiente de λ , y lo llamamos $\Delta(\lambda)$. Este subespacio está únicamente definido, y es el espacio generado por un conjunto de vectores combinados linealmente con potencias de λ , que son introducidos en el apéndice D. El kernel aumenta su dimensión en r_i cuando $\lambda = \lambda_i$ y para cada i . Por otro lado, el subespacio $\Delta(\lambda_i)$ tiene la propiedad que cuando es proyectado con $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}$, es ortogonal al kernel por derecha $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ (esta prueba se encuentra en el apéndice E del trabajo [3]). Esta proyección es llamada $\Delta_{\mathfrak{N}}(\lambda)$ y la proyección de $\Psi_L^{\lambda_i}$ en Φ_R (usando $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}$) es llamada $\Phi_L^{\lambda_i}$. Por lo que usando la métrica $G_{\alpha\beta}$ podemos escribir $\Phi_L^{\lambda_i} = \Delta_{\mathfrak{N}}(\lambda_i) \oplus (\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$ como suma directa de $\Delta_{\mathfrak{N}}(\lambda_i)$ y su espacio perpendicular dentro de $\Phi_L^{\lambda_i}$, llamado $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$. Ya que $\Delta_{\mathfrak{N}}(\lambda_i)$ es perpendicular a $\Phi_R^{\lambda_i(k)}$ y a $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$, los ángulos entre $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$ y $\Phi_R^{\lambda_i}$ son los mismos que los ángulos entre $\Phi_L^{\lambda_i}$ y $\Phi_R^{\lambda_i}$, que son lo que aparecen en la hipótesis de nuestro teorema y por lo tanto sus cosenos están acotados con una cota positiva. Queremos ahora elegir un W tal que $\Upsilon_L^{\lambda_i}$ (con sus vectores proyectados con $G^{\alpha\gamma}$) coincide con $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$ y por lo tanto sus respectivos ángulos. Para hacer eso, elegimos un conjunto linealmente independiente de r_i vectores $\{v_A^l\}$ en $\Psi_L^{\lambda_i}$ tal que $\exp\{v_A^l \mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}\} = (\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$. Tomando ahora una base canónica de $e - u$ vectores $\{\chi_A^i\}$ de $\Delta(\lambda_i)$, obtenemos una base para $\Psi_L^{\lambda_i} = \exp\{\chi_A^i, v_A^l\}$ (esta base

define W , ver apéndice D). Veamos que este conjunto de vectores es realmente linealmente independiente. Supongamos que un vector en $\Delta(\lambda_i)$ es combinación lineal de los otros $\chi_A = a_l v_A^l$. Contrayendo con $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}$ obtenemos $\chi_A \mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma} = a_l v_A^l \mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}$ y podemos notar que el lado izquierdo es un elemento de $\Delta_{\mathfrak{N}}(\lambda_i)$ y el lado derecho de $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$. Esto es absurdo ya que esos espacios son perpendiculares, por lo que ambos lados deben anularse. Pero debido a que asumimos que los $\{v_A^l \mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{\eta\gamma}\}$ son linealmente independientes, los a_l deben anularse.

Usando esta base es fácil ver que el W resultante tiene la propiedad que $(\Phi_L^{\lambda_i})^\perp$ es el kernel por izquierda del sistema reducido (bajando los índices con $G_{\alpha\gamma}$), por lo que este coincide con $\Upsilon_L^{\lambda_i}$ y por lo tanto tienen los mismos ángulos con respecto a $\Phi_R^{\lambda_i}$. Esto concluye la prueba.

Para cerrar esta subsección mostramos como aplicar este proceso en ejemplos prácticos. Dado un símbolo principal realizamos su descomposición de Kronecker, de donde obtenemos una base

$$\chi_A^s(\lambda) \text{ y } (v_{\lambda_i}^l)_A \quad (4.29)$$

con $\chi_A^s(\lambda) := ((\theta_{m_s}^s)_A - \lambda(\theta_{m_s-1}^s)_A + \lambda^2(\theta_{m_s-2}^s)_A - \dots - \lambda^{m_1}\theta_{0A}^s)$, un conjunto de vectores que pertenecen al kernel por izquierda del símbolo principal, para todo λ . Y los $(v_{\lambda_i}^l)_A$ son tales que completan la base cuando $\lambda = \lambda_i$. El subespacio expandido por $\{\chi_A^s(\lambda)\}$ es lo que arriba llamamos $\Delta(\lambda)$. Entonces, para cada λ_i el kernel por izquierda del sistema completo es $\Psi_L^{\lambda_i} = \text{expan}\{\chi_A^s(\lambda_i), (v_{\lambda_i}^l)_A\}$. Esta base no es única, por lo que vamos a cambiar los elementos $\{(v_{\lambda_i}^l)_A\}$ por una nueva base $\{(\tilde{v}_{\lambda_i}^l)_A\}$ para encontrar reducciones \tilde{h}_A^α . De la ecuación (4.27) vemos que una vez fijado el conjunto $\{(v_{\lambda_i}^l)_A\}$ la reducción es también fijada, ya que Y y W dependen de esos vectores. Como mencionamos arriba para $i \in I_{\lambda_i(k)}$ elegimos $r_{\lambda_i(k)}$ nuevos vectores $\{(\tilde{v}_{\lambda_i}^l)_A\}$ tal que cuando ellos son proyectados en Φ_R , expanden $(\Phi_L^{\lambda_i(k)})^\perp$. La nueva base de $\Psi_L^{\lambda_i} = \text{expan}\{\chi_A^s(\lambda_i), (\tilde{v}_{\lambda_i}^l)_A\}$ es usada ahora para escribir \tilde{h}_A^α como en la ecuación (4.27).

4.4. Klein Gordon.

En esta sección consideramos un espacio tiempo de Minkowski y estudiamos las ecuaciones de Klein Gordon sobre el mismo. Mostramos que la descomposición de Kronecker del símbolo principal tiene bloques $2 \times J_1$, $3 \times L_1^T$ y $3 \times L_0^T$ con autovalores generalizados ± 1 . Como fue mostrado en [4], este sistema es simétrico hiperbólico, por lo que existen reducciones fuertemente hiperbólicas. Mostraremos algunas de ellas.

La ecuación de Klein Gordon es

$$g^{ab} \nabla_b \nabla_a \phi = 0.$$

La misma, puede ser escrita en primer orden, introduciendo nuevas variables

$$\phi_a := \nabla_a \phi. \quad (4.30)$$

Obtenemos un sistema de nueve ecuaciones para cinco variables, (ϕ, ϕ_a) . Estas son

$$\begin{aligned}\nabla_b \phi - \phi_b &= 0 \\ \nabla^b \phi_b &= 0 \\ \nabla_{[a} \phi_{b]} &= 0\end{aligned}$$

La ecuación del kernel por derecha del símbolo principal (ecuación de la Eikonal) es,

$$\begin{pmatrix} \delta_a^d & 0 \\ 0 & g^{dl} \\ 0 & \delta_{[b}^d \delta_{c]}^l \end{pmatrix} l(\lambda)_d \begin{pmatrix} \delta \phi \\ \delta \phi_l \end{pmatrix} = 0$$

Eligiendo un co-vector temporal n_a y líneas $l_a(\lambda) = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}^{\mathbb{C}}$, obtenemos la forma del matriz pencil del símbolo principal,

$$-\lambda \begin{pmatrix} \delta_a^d & 0 \\ 0 & g^{dl} \\ 0 & \delta_{[b}^d \delta_{c]}^l \end{pmatrix} n_d + \begin{pmatrix} \delta_a^d & 0 \\ 0 & g^{dl} \\ 0 & \delta_{[b}^d \delta_{c]}^l \end{pmatrix} k_d$$

estamos considerando $n.n = -1$, $k.k = 1$, y $n.k = 0$.

Siguiendo el apéndice D, el kernel por izquierda es expandido por los co-vectores $\{(\hat{\theta})_{0A}, (\tilde{\theta}_i)_{0A}, -\lambda \theta_{0A} + \theta_{1A}, -\lambda (\check{\theta}_i)_{0A} + (\check{\theta}_i)_{1A}\}$ con $i = 1, 2$, que expanden el subespacio $\Delta(\lambda)$, y los autovectores generalizados $\{v_{1A}, v_{2A}\}$ asociados a los autovalores generalizados $\lambda_{\pm} = \pm 1$ respectivamente. La base de Kronecker por izquierda viene dada por,

$$\begin{aligned}(\hat{\theta})_{0A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^{k_1bcd} n_d k_{k_1} \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\ (\tilde{\theta}_i)_{0A} &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1ade} n_d (l_i)_e k_{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \\ \theta_{0A} &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1ade} l_{1d} l_{2e} n_{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\ \theta_{1A} &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1ade} l_{1d} l_{2e} k_{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\ (\check{\theta}_i)_{0A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^{k_1kla} (l_i)_a n_{k_1} \end{pmatrix} \rightarrow 2 \\ (\check{\theta}_i)_{1A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^{k_1kla} (l_i)_a k_{k_1} \end{pmatrix} \rightarrow 2 \\ v_{iA} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \lambda_i & n^{[b} k^{c]} \end{pmatrix} \rightarrow 2\end{aligned}$$

donde $l_i.k = l_i.n = 0$ y $l_i.l_j = \delta_{ij}$ con $i, j = 1, 2$

Con este conjunto, construimos la descomposición de Kronecker como en la ecuación (4.18)

$$Y_B^A(n, k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_a & -k_a & -l_{1a} & l_{2a} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_{[b} k_{c]} & -n_{[b} k_{c]} & n_{[b} l_{1c]} & -k_{[b} l_{1c]} & -n_{[b} l_{2c]} & k_{[b} l_{2c]} & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{1[b} l_{2c]} \end{pmatrix}$$

$$K_{\alpha}^B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_{\eta}^{\alpha}(n, k) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(n^l + k^l) \\ 0 & \frac{1}{2}(-n^l + k^l) \\ 0 & -l_1^l \\ 0 & l_2^l \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo la ecuación (4.27) las reducciones son:

$$\tilde{h} = W^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_2 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & e_4 & d_4 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3 & 0 & \bar{b}_2 & 1 & c_3 & e_5 & d_5 & f_5 \end{pmatrix} Y^{-1}$$

donde los coeficientes en $\tilde{h}_{\gamma}^{\gamma}$ son funciones complejas arbitrarias de n y k , con la excepción de a_1 , b_1 y c_3 que son reales.

Las ecuaciones pseudo-diferenciales de evolución (parte principal) son

$$\begin{pmatrix} \partial_t \hat{\phi} \\ \partial_t \hat{\phi}_l \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -c_3 & k^b n^a \bar{R}^c \varepsilon_{bac}^m \\ k^b n^a R^c \varepsilon_{lbac} & -k_l n^m + n_l k^m - i a_{2I} \varepsilon_l^{bma} n_b k_a + S_l^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\phi}_m \end{pmatrix}$$

con $a_2 = a_{2R} + i a_{2I}$, $S_l^m = -a_{2R} (l_{1l} l_2^m - l_{2l} l_1^m) + a_{1l} l_{1l} l_1^m + b_1 l_{2l} l_2^m$, y R^c cualquier vector complejo.

Es instructivo escribir las reducciones diferenciales posibles. En coordenadas Cartesianas adaptadas el sistema es original es,

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \phi_0 \\ \partial_t \phi_0 &= -\partial^i \phi_i \\ \partial_t \phi_i &= \partial_i \phi_0 \\ C_i &:= \partial_i \phi - \phi_i = 0 \\ C_{ij} &:= \partial_{[i} \phi_{j]} = 0, \end{aligned}$$

Donde las últimas dos ecuaciones claramente son vínculos diferenciales.

De este modo, las hiperbolizaciones diferenciales mas generales son obtenida tomando $S_l^m = 0$ y $c_3 = L^i k_i$. Las ecuaciones para la parte principal resultan,

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi &= L^i \partial_i \phi - \bar{R}_k \varepsilon^{ijk} \partial_i \phi_j = L^i C_i - \bar{R}_k \varepsilon^{ijk} C_{ij} \\
\partial_t \phi_0 &= -\partial^i \phi_i \\
\partial_t \phi_i &= \partial_i \phi_0 + R_k \varepsilon_i^{jk} \partial_j \phi - i a_{2I} \varepsilon_l^{mj} \partial_j \phi_m = \partial_i \phi_0 + R_k \varepsilon_i^{jk} C_j + i a_{2I} \varepsilon_l^{ij} C_{ij}
\end{aligned}$$

Esta expresión claramente muestra que la libertad viene de agregar términos de vínculos al conjunto original.

4.5. Conclusiones.

En este capítulo encontramos condiciones necesarias y suficientes que un sistema de primer orden en derivadas, con vínculos diferenciales, tiene que satisfacer para tener una hiperbolización (ver teorema 21). En el caso de coeficientes constantes, se explico como construir esas reducciones/hiperbolizaciones tal que las ecuaciones de evolución (surgidas de las mismas), tienen una formulación de valores iniciales bien puesta. Contrario al tratamiento clásico, el sistema reducido no es un sistema en derivadas parciales, este es un sistema pseudo-diferencial en general. Sin embargo, la teoría usual aplica como se explico en la sección 2.3.

Para alcanzar este resultado se introdujo el concepto de ángulos principales entre subespacios vectoriales y se mostró que toda la información de la hiperbolicidad fuerte del sistema queda caracterizada por los mismos. Los subespacios pertinentes son el kernel por derecha del símbolo principal y el kernel por izquierda (proyectado con $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b G^{m\gamma}$, sobre Φ_R). De este modo, vimos que el resultado principal del capítulo 4 es equivalente a que estos ángulos $(\theta_j^{\lambda_i(k)})$ sean menores que $\frac{\pi}{2}$. Esta condición, nos permite construir reducciones, pero no es suficiente para concluir la hiperbolicidad fuerte del sistema reducido. Para ello, en el teorema principal de este capítulo (teorema 21), agregamos una condición de uniformidad extra, que si garantiza la hiperbolicidad fuerte. Esta condición es la existencia una constante ϑ , tal que para todo k_a , los ángulos están uniformemente acotados $0 \leq \theta_j^{\lambda_i(k)} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

Es importante mencionar que una vez que el dato inicial es dado, la solución del sistema reducido es única, por lo que si el sistema completo tiene solución, debe ser la misma que la obtenida del sistema reducido. En general, esta situación no ocurre, ya que si el dato inicial se da cumpliendo los vínculos, la solución obtenida puede no cumplirlos en tiempos posteriores. Por lo que todavía resta mostrar que los vínculos se propagan consistentemente. Algunas ideas sobre la hiperbolicidad fuerte del sistema subsidiario de vínculos son presentadas en el capítulo 7.

El hecho que el sistema reducido sea pseudo-diferencial puede traer un problema. No es claro cuando el sistema tiene una propagación causal, es decir, cuando existe una velocidad máxima de propagación. Claramente los autovalores de $A_{\beta}^{\alpha\alpha} k_a$ son todos finitos, pero esto no necesariamente significa que dado un dato inicial con soporte compacto esto se mantenga para tiempos posteriores. De hecho, si el sistema reducido no es analítico

en k_a , entonces la solución no puede tener soporte compacto. Es decir, asumamos que elegimos un dato inicial con soporte compacto ϕ_0^α , entonces su transformada de Fourier $\hat{\phi}_0^\alpha$ es analítica. Escribiendo el sistema como

$$\frac{d\hat{\phi}^\alpha}{dt} = iA_\beta^\alpha(k)\hat{\phi}^\beta,$$

su solución es

$$\hat{\phi}^\alpha(k, t) = e^{iA(k)t}\hat{\phi}_0^\alpha(k),$$

pero si $A_\beta^\alpha(k)$ es no analítica, tampoco puede serlo la solución para tiempos finitos t . Entonces, para reducciones no analíticas, la solución no puede tener soporte compacto en tiempos posteriores al inicial o saliendo de la superficie inicial. Creemos que la causalidad debe venir de reducciones analíticas, una forma de ver esto es usando las ideas de [24]. En cualquier caso, es importante desarrollar una teoría requiriendo condiciones necesarias y suficientes para la existencia de estas reducciones.

Por otro lado, para encontrar reducciones no pseudo-diferenciales en el caso de coeficientes variables o cuasi-lineales, podemos aplicar el esquema desarrollado en este capítulo, del siguiente modo: trabajando en el fibrado cotangente (x, k) , realizar la descomposición de Kronecker del símbolo principal, proponer reducciones del tipo (4.27), y usando las libertades en sus parámetros tratar de cancelar la dependencia en k_a . Si esto es posible, obtendremos reducciones diferenciales $\tilde{h}_B^\gamma(x, \phi)$. Esas posibles reducciones seleccionarán un conjunto de ecuaciones de evolución

$$\tilde{h}_B^\gamma \mathfrak{N}_\alpha^{Aa}(x, \phi) \nabla_a \phi^\alpha = \tilde{h}_B^\gamma J^A(x, \phi), \quad (4.31)$$

que asumimos cumplen la condiciones de suavidad necesarias (ver sección 2.5). Por otro lado, este sistema tiene el simetrizador natural $H_{\alpha\eta} := \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} I_\gamma^C W_\eta^\gamma$ que automáticamente cumple las condiciones 1 y “2”¹² de la definición 6, si además cumple las condiciones de suavidad en sus variables (x, ϕ^α, k_a) , entonces el sistema (4.31) es fuertemente hiperbólico. Por otro lado, si $\tilde{h}_B^\gamma(x, \phi_0)$ es una reducción diferencial y $H_{\alpha\eta} = \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} I_\gamma^C W_\eta^\gamma$ es independiente de k_a y suave en sus variables, el sistema es simétrico hiperbólico. En este último caso, el simetrizador de Geroch del sistema completo, toma la forma $h_{\alpha A} := \overline{W}_\alpha^\delta H_{\delta C} (Y^{-1})_A^C$.

¹²Sabemos que el simetrizador es definido positivo por construcción, pero no necesariamente uniformemente positivo, por lo que esta condición podría fallar. Además tampoco podemos asegurar que este acotado superiormente.

Capítulo 5

Electrodinámica no lineal.

5.1. Introducción.

En este capítulo estudiamos teorías electrodinámicas no lineales (NLED, por sus siglas en ingles) surgidas de lagrangianos arbitrarios, definidos en términos de los invariantes electromagnéticos. Las ecuaciones diferenciales que describen a estas teorías son cuasi-lineales y tienen vínculos diferenciales. Mostramos que las mismas son hiperbolizables y que resultan en sistemas simétricos hiperbólicos. Aunque es el primer trabajo que realizamos en el doctorado [13], este se ubica en el capítulo 5 de esta tesis, ya que es un ejemplo de aplicación, que se podría haber analizado con la teoría de los capítulos 3 y 4. Sin embargo, el análisis usado para el mismo es previo al desarrollo de esta teoría.

Las teorías NLED son relevantes en varias áreas de la física. Por ejemplo, en QED, en donde la polarización de vacío conduce naturalmente a efectos no lineales efectivos descritos por lagrangianos del tipo de Euler-Heisenberg [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65]. En algunos dieléctricos y cristales, la interacción entre las moléculas y los campos electromagnéticos pueden ser descritos por teorías no lineales electromagnéticas [66, 67]. Posibles consecuencias de NLED también han sido exploradas en cosmología y astrofísica. En particular, se cree que las no linealidades juegan un rol importante en la descripción del sector oscuro del universo [68, 69, 70, 71, 72, 73]; para evitar singularidades cuando son acopladas a las ecuaciones de Einstein [74, 75, 76]; en la física de agujeros negros cargados [77, 78, 79]. En teorías de mas dimensiones, el modelo no lineal de Born-Infeld [80, 81, 82] tiene conexiones matemáticas con la teoría de cuerdas [83]. Por último, las teorías NLED también atraen la atención, ya que ellas pueden responder algunas preguntas relativistas de la propagación de la luz, experimentales y teóricas.

Usando el formalismo geométrico de Geroch encontramos las hiperbolizaciones admitidas por las teorías NLED y mostramos que ellas están parametrizadas por un vector $t^q(x)$ (como sucede en el caso lineal). Esta construcción nos permitió encontrar condiciones necesarias y suficientes (que la teoría y sus campos deben satisfacer), para que las mismas tengan una formulación de valores iniciales bien puesta. La respuesta encontrada fue: el sistema es simétrico hiperbólico, si y solo si, los dos conos surgidos de la relación de

dispersión de las dadas teorías NLED tienen intersección no vacía. Cabe destacar que este resultado es independiente de la métrica de fondo y que estos conos están asociados a dos métricas lorentzianas g_1^{ab} y g_2^{ab} (soluciones de la ecuación de la Eikona). Por otro lado nuestra construcción también nos permite encontrar los conos de causalidad (las máximas velocidades de propagación) para cada hiperbolización. En general estos conos dependen de la hiperbolización elegida, sin embargo, hemos encontrado que en estos casos los mismos vienen dado por los conos de g_{ab}^1 (inversa de g_1^{ab}), es decir, toda la información de la propagación puede obtenerse de la relación de dispersión.

Por último, mostramos cuatro ejemplos de aplicación: las teorías electrodinámicas de Born-Infeld, Gauss-Bonnet, Euler Eisenberg y un modelo de juguete. Encontramos que todos ellos son simétricos hiperbólicos ante ciertas restricciones sobre sus campos. Y que algunas de estas teorías permiten velocidades de propagación superlumínicas. En particular, en el ejemplo de juguete, vemos que el cono de propagación es espacial para la métrica de fondo g_{ab} . Es decir, esta clase de teorías tienen su evolución en direcciones espaciales para g_{ab} , implicando que no las podríamos acoplar con teorías con causalidad relativista.

5.2. Aspectos generales de la teoría.

5.2.1. Lagrangianos y ecuaciones de movimiento.

Consideremos un espacio tiempo (M, g) con $\dim M = 4$, signatura $(+, -, -, -)$ para la métrica, y el tensor electromagnético F_{ab} , antisimétrico en sus índices. Definimos

$$F := F^{ab}F_{ab} = 2(H^2 - E^2) \quad G := F^{ab}F_{ab}^* = 4\vec{E} \cdot \vec{H} \quad (5.1)$$

estas son cantidades invariantes antes cambios de coordenadas, los llamamos invariantes electromagnéticos. Además $F_{ab}^* = \frac{1}{2}\eta_{abcd}F^{cd}$ donde η_{abcd} es el tensor de Levi-Civita, y (\vec{E}, \vec{H}) los campos electromagnéticos.

Consideremos ahora modelos no lineales electrodinámicos en vacío, dados por la acción,

$$S = \int \mathcal{L}(F, G) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.2)$$

donde la densidad lagrangiana $\mathcal{L}(F, G)$ es una función suave arbitraria de los invariantes F y G , y donde $g := \det(g_{ab})$. Las ecuaciones de movimiento asociadas a este sistema son

$$\nabla_a \left(\mathcal{L}_F F^{ab} + \mathcal{L}_G F^{ab*} \right) = 0, \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (5.3)$$

∇ representa una derivada covariante asociada a la métrica g y $\mathcal{L}_X := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$. La primer ecuación es obtenida via un principio variacional, mientras que la segunda es introducida desde afuera. Esta última garantiza la existencia de un potencial A_a tal que $F_{ab} = \nabla_{[a} A_{b]}$. También definimos las siguientes cantidades

$$\xi_1 := 2\mathcal{L}_{FF}/\mathcal{L}_F, \quad \xi_2 := 2\mathcal{L}_{FG}/\mathcal{L}_F, \quad \xi_3 := 2\mathcal{L}_{GG}/\mathcal{L}_F. \quad (5.4)$$

que son de utilidad en todo el capítulo.

5.3. Estructura característica y métricas efectivas.

Consideremos la ecuación de la Eikonal (2.32) para las ecuaciones (5.3), esta es una perturbación de alta frecuencia sobre una solución de fondo suave. Es conocido que la estructura característica obtenida de la misma está controlada por dos métricas efectivas. Este resultado fue obtenido en los 70 [84, 85], aunque recientemente Obukhov y Rubilar [86] obtuvieron el mismo resultado interpretando a las ecuaciones (5.3) como ecuaciones electrodinámicas dentro de un medio material con leyes constitutivas no lineales. Ellos mostraron que si Σ es una superficie característica descrita por $S(x^a) = \text{const}$, los vectores normales $l_a =: \partial_m S$ vienen dados por las soluciones de la siguiente ecuación cuártica en l_a

$$\mathcal{P}^*(x, \phi, l) := \mathfrak{G}^{abcd}(x, \phi) l_a l_b l_c l_d = 0. \quad (5.5)$$

Donde $\mathfrak{G}^{abcd}(x, \phi)$ depende de la solución de fondo ϕ y de los puntos x de M . Físicamente, (5.5) juega el rol de la relación de dispersión para soluciones de onda de la versión linealizada, y da lugar a un tipo de “ecuación de Fresnel” covariante [87, 88].

Para las teorías NLED consideradas aquí, vemos que debido a propiedades algebraicas, el polinomio (5.5) se reduce a la forma simple

$$\mathcal{P}^*(x, \phi, l) = al^4 + Qk^2p^2 + Rp^4 \quad (5.6)$$

con $l^2 = g^{ab}l_a l_b$, $p^2 = F_c^a F^{bc} l_a l_b$, y

$$a := (1 + \xi_2 G - \xi_3 F - RG^2/16), \quad (5.7)$$

$$Q := 2(\xi_1 + \xi_3 - RF/4), \quad (5.8)$$

$$R := 4(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2). \quad (5.9)$$

Es posible factorizar (5.6) en un producto de dos superficies de segundo orden (superficies características), dadas en términos de las formas cuadráticas

$$\mathfrak{g}_1^{ab}(x) l_a l_b = 0, \quad \mathfrak{g}_2^{ab}(x) l_a l_b = 0, \quad (5.10)$$

con las métricas efectivas

$$\mathfrak{g}_1^{ab} := ag^{ab} + b_1 F_c^a F^{bc}, \quad (5.11)$$

$$\mathfrak{g}_2^{ab} := g^{ab} + (b_2/a) F_c^a F^{bc}, \quad (5.12)$$

Cuyos parámetros son¹

¹Notemos que si $a \rightarrow 0$ entonces $b_1 \rightarrow 0$ o $b_2 \rightarrow 0$ y que si estas métricas dejan de tener sentido porque algún coeficiente diverge o se anula, siempre podemos rescalarlas como $\tilde{\mathfrak{g}}_1^{ab} = \frac{1}{x} \mathfrak{g}_1^{ab}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{ab} = x \mathfrak{g}_2^{ab}$ donde x es lo que haga falta para que las mismas tengan sentido. Los resultados que presentamos a continuación son independientes de este rescaleo.

$$b_1 := \frac{Q + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad b_2 := \frac{Q - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta := Q^2 - 4aR. \quad (5.13)$$

Como fue mostrado por Boillat [89], el discriminante Δ nunca es negativo, ya que $\Delta = 4(N_1^2 + N_2^2)$ con

$$N_1 := (\xi_1 - \xi_3) - RF/4, \quad N_2 := 2\xi_2 - RG/4. \quad (5.14)$$

por lo que las raíces en los b_i son siempre reales.

Por otro lado Obukhov y Rubilar mostraron que g_1^{ab} y g_2^{ab} son siempre Lorentzianas mientras que g^{ab} lo sea. Sin embargo, pueden existir combinaciones de los coeficientes (5.13) que vuelvan a estas métricas degeneradas (no invertibles). El sistema no es simétrico hiperbólico en estos casos, por lo que los mismos no son considerados (ver apéndice B de [13] para una prueba).

Definimos las correspondientes inversas de las métricas efectivas como g_{ab}^1 y g_{ab}^2 tal que $g_1^{ac} g_{cb}^1 = \delta_b^a$ y $g_2^{ac} g_{cb}^2 = \delta_b^a$.

5.3.1. Estructura geométrica: conos y coconos.

Las métricas efectivas están definidas ante transformaciones conformes. Sin embargo, las propiedades geométricas de las mismas están en sus conos, que no dependen de estas redefiniciones. Llamamos C_{g_i} al cono de g_i , este es el conjunto de vectores temporales (futuros dirigidos)² con respecto a la métrica g_i . Y $C_{g_i}^* := \text{int}(\{n_a \in T_p^* \mathbf{M} \mid n_a v^a > 0, \forall v^a \in C_{g_i}\})$ ³ sus coconos duales. Es importante mencionar que dado que C_{g_i} esta definido por la métrica g_{ab}^i . El conjunto $C_{g_i}^*$ resulta de la colección de covectores obtenidos de bajar el índice a los vectores de C_{g_i} con g_{ab}^i (puede haber un signo global de diferencia). Estudiaremos sus propiedades geométricas, ya que ellos van a jugar un papel importante en la descripción de hiperbolicidad.

Debido a que estas métricas dependen explícitamente de los campos electromagnéticos F_{ab} , haremos dos distinciones que se corresponden a diferentes estructuras geométricas: *i*) el caso no degenerados $F^2 + G^2 \neq 0$ y *ii*) el caso degenerado $F = G = 0$ (ver [90]). Sin embargo no explicitaremos los resultados para el caso degenerado, los detalles se encuentran en [13].

5.3.1.1. F_{ab} no degenerado ($F^2 + G^2 \neq 0$)

En cada punto $x \in M$ una dos forma F_{ab} tiene dos direcciones nulas principales l^b y k^b ([91, 92, 93]), estas son autovectores de F_b^a tal que $F_b^a l^a = \pm \sqrt{\frac{-F + \sqrt{F^2 + G^2}}{4}} l^b$

²Para los sistemas simétricos hiperbólicos, una vez que el simetrizador es dado, adoptamos la convención que los conos futuros de las métricas efectivas, son aquellos que tienen intersección no vacía con los conos de propagación. En el caso que el sistema no sea simétrico hiperbólico consideramos todos los conos, dos por cada métrica, y nos referimos a ellos como conos.

³Elegimos solo el interior para hacer los coconos duales un conjunto abierto y ponerlos en igualdad de condiciones que los conos C_{g_i} .

y $F_b^a k^a = \pm \sqrt{\frac{F + \sqrt{F^2 + G^2}}{4}} k^a$ (ver apéndice A de [13]). k^a y l^a son vectores nulos con respecto a las tres métricas g_{ab} , g_{ab}^1 y g_{ab}^2 , por lo que las clausuras de todos los conos los contienen. Estas direcciones nos permiten encontrar un frame ortonormal, donde $\vec{E} \parallel \vec{H}$, tal que g_{ab} se reduce a $\eta_{ab} := \text{diag}(+, -, -, -)$ y las métricas efectivas a

$$g_{ab}^i t^a t^b := \alpha_i^{-1} (t_0^2 - t_3^2) - \beta_i^{-1} (t_1^2 + t_2^2) \quad g_{ab}^i n_a n_b := \alpha_i (n_0^2 - n_3^2) - \beta_i (n_1^2 + n_2^2) \quad (5.15)$$

con $i = 1, 2$ y

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= a + b_1 \frac{1}{4} \left(F - \sqrt{F^2 + G^2} \right) & \beta_1 &:= a + b_1 \frac{1}{4} \left(F + \sqrt{F^2 + G^2} \right) \\ \alpha_2 &:= 1 + \frac{b_2}{a} \frac{1}{4} \left(F - \sqrt{F^2 + G^2} \right) & \beta_2 &:= 1 + \frac{b_2}{a} \frac{1}{4} \left(F + \sqrt{F^2 + G^2} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Notemos que estos coeficientes están definidos covariantemente ya que solo depende de los invariantes F y G .

A partir de ahora no consideraremos casos donde α_i o β_i se anulen, ya que como mencionamos antes, en estos casos las métricas no son invertibles y el sistema no es simétrico hiperbólico (ver apéndice B de [13]). Entonces, dado que α_i, β_i no se anulan, vemos que los conos efectivos están caracterizados por sus signos, por lo que introducimos dos cantidades útiles

$$\Omega_i := \alpha_i \beta_i \quad \text{con } i = 1, 2$$

y presentamos una tabla mostrando todas las posibles combinaciones.

	signo (α_i)	signo (β_i)	signatura de g_i	Vector temporal	$g_{ab}^i t^a t^b$	Signo(Ω_i)
i)	+	+	(+, -, -, -)	$t^a = (1, 0, 0, 0)$	$\alpha_1^{-1} > 0$	+
ii)	-	-	(-, +, +, +)	$t^a = (1, 0, 0, 0)$	$\alpha_1^{-1} < 0$	+
iii)	+	-	(+, +, +, -)	$t^a = (0, 0, 0, 1)$	$-\alpha_1^{-1} < 0$	-
iv)	-	+	(-, -, -, +)	$t^a = (0, 0, 0, 1)$	$-\alpha_1^{-1} > 0$	-

Notemos que la signatura de las métricas efectivas no necesariamente es compartida con la métrica de fondo. En particular la norma de los vectores temporales depende de los campos de fondo F_{ab} y no tiene un signo preferido. Los conos por otro lado, son independientes de como sea la signatura.

Enunciamos la siguiente proposición que se puede concluir de la tabla.

Proposición 25 (i) Si $\Omega_i > 0$, entonces $C_{g_i} \cap C_\eta \neq \emptyset$. (con $\eta_{ab} := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$).
 (ii) Si $\Omega_i < 0$, entonces $C_{g_i} \cap C_\sigma \neq \emptyset$. (con $\sigma_{ab} := \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$).

Por lo tanto, hay solo tres posibles configuraciones para los conos efectivos en $T_p M$. Los tres conos se intersectan (Fig.5.1a); ellos no se intersectan (Fig.5.1b); los dos conos efectivos se intersectan entre ellos, pero no lo hacen con el cono de fondo (Fig.5.1c). Además, cuando ellos se intersectan, es siempre posible ver que uno se encuentra incluido en el otro. El Lema siguiente muestra esto

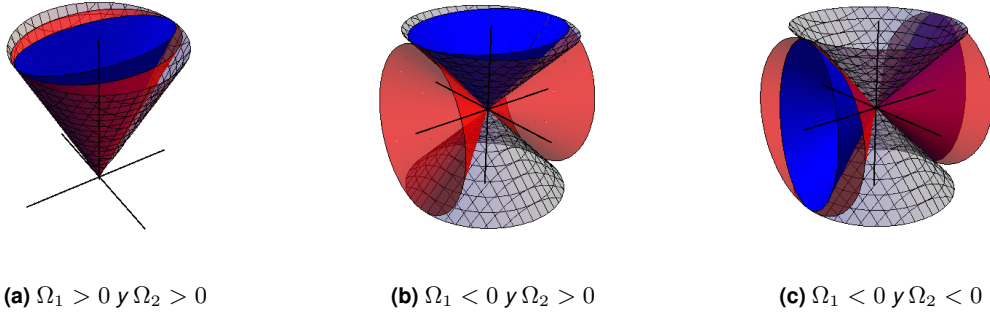


Figura 5.1: Caso no degenerado $F^2 + G^2 \neq 0$. Posibles conos nulos de las métricas : g_{ab}^1 (rojo); g_{ab}^2 (azul); η_{ab} (gris).

Proposición 26 Cuando los conos se intersecan $C_{g_1} \cap C_{g_2} \neq \emptyset$ es decir $\text{signo}(\Omega_1) = \text{signo}(\Omega_2)$, entonces

- (i) $C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$
- (ii) $C_{g_2} \subseteq C_{g_1}$

Prueba. Primero vamos a probar la siguiente desigualdad

$$\alpha_1 \beta_2 \leq 1 \leq \alpha_2 \beta_1 \quad (5.17)$$

la misma surge como una consecuencia algebraica de las definiciones (5.16).

Empecemos escribiendo los productos,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_2 &= 1 + \frac{1}{2} \left((FN_1 + GN_2) - \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right), \\ \alpha_2 \beta_1 &= 1 + \frac{1}{2} \left((FN_1 + GN_2) + \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

es trivial concluir de los mismos que $\alpha_2 \beta_1 \geq \alpha_1 \beta_2$. De estas expresiones además es posible probar que,

$$-(1 - \alpha_1 \beta_2)(1 - \alpha_2 \beta_1) = \frac{1}{4} (GN_1 - FN_2)^2 \geq 0. \quad (5.19)$$

Por lo que la positividad del lado derecho, junto con la condición $\alpha_2 \beta_1 \geq \alpha_1 \beta_2$, fuerzan a la desigualdad (5.17).

Definimos ahora dos cantidades auxiliares

$$\gamma_i := \sqrt{|\alpha_i / \beta_i|}, \quad (5.20)$$

que ayudan a capturar la noción de “cuan abierto se encuentra un cono (o cocono) en una determinada dirección”, en particular nosotros miraremos en la dirección ortogonal al plano definido por las direcciones nulas.

Aunque, el cálculo siguiente se hace en un frame particular, la conclusión de cual es el cono interior y cual es el exterior, tiene un sentido geométrico y directamente se extrapola a cualquier frame.

Asumamos que $C_{g_1} \cap C_{g_2} \neq \emptyset$, es decir,

$$\text{signo}(\Omega_1) = \text{signo}(\Omega_2) \quad (5.21)$$

esto es equivalente a

$$0 < \Omega_1 \Omega_2 = \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \beta_1$$

que junto con (5.17), implica que $\alpha_1 \beta_2 > 0$ y por lo tanto que $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Supongamos que $\Omega_1 > 0$ y $\Omega_2 > 0$ y consideremos una transición continua de un co-vector temporal a uno espacial (con respecto a las métricas efectivas) parametrizado por $x \in [0, 1]$, en la forma

$$n_a(x) = (1 - x)(1, 0, 0, 0) + x(0, \cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (5.22)$$

con $\phi \in [0, 2\pi)$. La idea es encontrar x_1 y x_2 tal que los co-vectores se vuelven nulos, es decir, $g_i^{ab} n_a(x_i) n_b(x_i) = 0$ con $i = 1, 2$. La soluciones viene dadas por

$$x_i = \frac{1}{1 + \gamma_i^{-1}} \quad (5.23)$$

que determina que $x_1 \leq x_2$.

Asumiendo ahora que $\Omega_1 < 0$, $\Omega_2 < 0$ y considerando

$$n_a(x) = (1 - x)(0, 0, 0, 1) + x(0, \cos \phi, \sin \phi, 0)$$

obtenemos exactamente la misma conclusión $x_1 \leq x_2$.

Estos dos últimos resultados nos permiten concluir que $C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$ como es afirmado en (i). La prueba de (ii) es completamente análoga. ■

Comentamos brevemente el caso degenerado $F = G = 0$. En este caso, para cada punto $x \in M$ existe una única dirección principal nula (nula con respecto a las tres métricas). Por lo que es posible probar que las métricas efectivas siempre tienen intersección $C_{g_1} \cap C_{g_2} \cap C_\eta \neq \emptyset$ y $C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* \cap C_\eta^* \neq \emptyset$, inclusive con la métrica de fondo, y la inclusiones vienen dadas por (i) $C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$ y (ii) $C_{g_2} \subseteq C_{g_1}$ (ver [13], para una prueba). En la figura 5.2 presentamos como lucen estas métricas en algún frame particular.

5.4. Resultados principales.

Usando la definición 7 de Geroch, mostraremos bajo que condiciones las teorías electromagnéticas no lineales son simétricas hiperbólicas.

Una vez que un hiperbolizador existe, como en la definición mencionada, sabemos que dado cualquier dato inicial suave en una hipersuperficie (tal que n_a es normal a ella), una solución local de las ecuaciones diferenciales de evolución existe. Además, ya que el conjunto de co-vectores n_a para el cual el hiperbolizador es definido positivo es abierto, siempre podemos elegirlos, en la vecindad de un punto, tal que ellos forman hipersuperficies. Denotamos por C_H^* la colección de todos los co-vectores n_a que satisfacen la

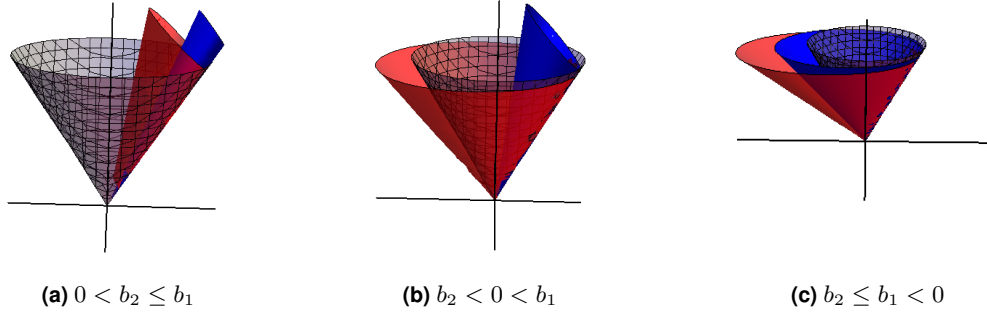


Figura 5.2: Caso degenerado $F = G = 0$. Posibles conos nulos de las métricas : g_{ab}^1 (rojo); g_{ab}^2 (azul); η_{ab} (gris).

condición (2) de la definición 7. Por lo que, C_H^* es un cono abierto, convexo⁴ y no vacío. Es de esperar, y en los ejemplos físicos conocidos sucede, incluido este, que ese cono está relacionado a la estructura característica dada por la ecuación (3.2), sin embargo las posibles hiperbolizaciones pueden modificarlos. Introducimos la noción de propagación física en este contexto. Las señales de propagación físicas son el conjunto de vectores p^a , tal que $p^a n_a > 0$ para todo $n_a \in C_H^*$. Este conjunto de p^a vectores también es un cono, convexo, cerrado y no vacío, que denotados C_H , el cono dual a C_H^* . Igual que antes este cono puede depender en principio de la hiperbolización elegida.

Consideremos el símbolo principal de esta teoría, sobre una solución de fondo F_{ab} y con métrica de fondo g_{ab} ,

$$\mathfrak{N}_\eta^{Am} \rightarrow \left(- \left[g_{a\ bc}^m + F_a^m \left(\xi_1 F_{bc} + \xi_2 F_{bc}^* \right) + F_a^m \left(\xi_2 F_{bc} + \xi_3 F_{bc}^* \right), \frac{1}{2} \eta_{a\ bc}^m \right] \right)$$

con $g_{abcd} := \frac{1}{2} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$.

Siguiendo la definición 7, buscamos un simetrizador $h_{\alpha A}$ tal que $\delta\phi^\alpha h_{\alpha A} \mathfrak{N}_\eta^{Am} \delta\tilde{\phi}^\eta$ es simétrico en $\delta\phi^\alpha$ y $\delta\tilde{\phi}^\eta$. Si llamamos $X^{ab} = \delta\phi^\alpha$ y $Y^{ab} = \delta\tilde{\phi}^\eta$ tenemos que

$$\mathfrak{N}_\beta^{Am} \delta\tilde{\phi}^\beta = \left(- \left[Y_a^m + A_Y F_a^m + B_Y F_a^{*m} \right], Y_a^{*m} \right)$$

donde

$$A_Y := [\xi_1(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) + \xi_2(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{Y})] \quad B_Y := [\xi_2(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) + \xi_3(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{Y})] \quad (5.24)$$

tal que $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \equiv X^{ab} Y_{ab}$.

En el caso lineal, cuando la teoría es la de Maxwell $A_Y = B_Y = 0$, el simetrizador resulta

$$h_{\alpha A} \delta\phi^\alpha = \left(X_q^a, -X_q^{*a} \right) t^q, \quad (5.25)$$

⁴Un conjunto C es convexo si para todo $u, v \in C$, los elementos entre u y v pertenecen a C , es decir, $tu + (1-t)v \in C$ para todo $t \in [0, 1]$.

donde t^a es vector un temporal y futuro dirigido que parametriza las posibles hiperbolizaciones. El simetrizador general también depende de un vector t^a , el mismo es

$$h_{\alpha A} \delta \phi^\alpha = \left(X_q^a, -X_q^* - A_{\mathbf{X}} F_q^* + B_{\mathbf{X}} F_q^a \right) t^q. \quad (5.26)$$

Notemos que recuperamos el simetrizador de Maxwell (5.25) cuando se apagan los términos no lineales $A_{\mathbf{Y}} = B_{\mathbf{Y}} = 0$.

Usando (5.26), calculamos

$$\delta \phi^\alpha h_{\alpha A} \mathfrak{N}_\eta^{Am} \delta \tilde{\phi}^\eta = (M_q^m + N_q^m + L_q^m) t^q, \quad (5.27)$$

con⁵

$$\begin{aligned} M_q^m &= +(X_q^a Y_a^m + Y_q^a X_a^m) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) \delta_q^m, \\ N_q^m &= -(A_{\mathbf{Y}} X_q^a + A_{\mathbf{X}} Y_q^a) F_a^m - (B_{\mathbf{Y}} X_q^a + B_{\mathbf{X}} Y_q^a) F_a^{*m}, \\ L_q^m &= +\{\xi_1(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) + \xi_2[(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})] + \xi_3(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y})\} \delta_q^m / 2, \end{aligned}$$

Esta expresión resulta simétrica en X e Y como queríamos mostrar. Notemos que el resultado no depende del lagrangiano elegido.

Para concluir que $h_{\alpha A}$ es un hiperbolizador nos resta encontrar algún par (n_a, t^a) tal que

$$H_{\alpha\eta}(t, n) := h_{\alpha A}(t) \mathfrak{N}_\eta^{Am} n_m > 0 \quad (5.28)$$

es definido positivo (condición 2 en la definición 7). Debido a que $H_{\alpha\eta}$ depende de la solución de fondo ϕ , existirán pares (n_a, t^a) tal que la ecuación (5.28) es válida, cuando ciertas restricciones sobre ϕ se cumplan. Como muestra el siguiente teorema.

Teorema 27 *El sistema (5.3) es simétrico hiperbólico, si y solo si, los conos efectivos (coconos también) tienen intersección no vacía, es decir, $C_{g_1} \cap C_{g_2} \neq \emptyset$ ($C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* \neq \emptyset$). Esta condición se cumple si y solo si*

$$\alpha_1 \beta_2 = 1 + \frac{1}{2} \left((F N_1 + G N_2) - \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right) > 0 \quad (5.29)$$

Este resultado revela un interesante aspecto geométrico de las teorías NLED respecto de la hiperbolicidad y además nos proveen una herramienta algebraica para monitoriar cuando esa propiedad geométrica se cumple. Cabe mencionar que la condición encontrada nos permite elegir o restringir los posibles lagrangianos (a través de los ξ_i) y por lo tanto las teorías. Por ejemplo, tanto en el caso de Maxwell como Born-Infeld $N_1 = N_2 = 0$ por lo condición se cumple trivialmente, mostrando que ambas teorías son simétricas hiperbólicas.

⁵Para obtener estas expresiones usamos las identidades $X^{aq} Y_{am}^* = -\frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) \delta_m^q + X_{am} Y^{aq}$ y $X^{aq} Y_{am}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) \delta_m^q - X_{am} Y^{aq}$.

Observemos que este resultado es independiente de la métrica de fondo, ya que su orientación con respecto a las métricas efectivas no juega ningun rol en la conclusión.

El próximo teorema muestra que cuando (5.29) es válido, no solo existe un par (n_a, t^a) sino todo un rango de posibles elecciones.

Teorema 28 *Una teoría satisfaciendo (5.29) admite una colección de hiperbolizadores (5.27) parametrizados por un vector t^a , tal que $t^a \in C_{g_1} \cap C_{g_2} = C_{g_2}$. Independiente de la elección particular de t^a , el cono de propagación C_H es dado por la clausura de la unión de los conos efectivos, es decir, $C_H = \bar{C}_{g_1} \cup \bar{C}_{g_2} = \bar{C}_{g_1}$.*

Veremos en la prueba que el cono para n_a es $C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* = C_{g_1}^*$, de este modo, usando la definición para el cono de propagación concluiremos que $C_H = \bar{C}_{g_1}$ como es enunciado en el teorema.

5.5. Pruebas de los teoremas 27 y 28

Notemos que $H_{\alpha\beta}(t, n)$ es lineal en t^a y n_a . Por lo que, dado un par (t_o^a, n_o^a) satisfaciendo $H_{\alpha\beta}(t_o, n_o) > 0$, si mantenemos fijo por ejemplo t_o^a , va a existir un entorno alrededor de n_o^a para el cual $H_{\alpha\beta}$ es definido positivo. Como ya mencionamos, ese entorno es un conjunto abierto y convexo. El mismo razonamiento puede hacerse para los entornos de t^a . Este resultado nos permitirá descartar algunas opciones posteriormente.

Solo probaremos los teoremas en el caso no degenerado $F^2 + G^2 \neq 0$. El caso degenerado $F = G = 0$ resulta siempre simétrico hiperbólico, debido a que los conos efectivos siempre tiene intersección no vacía. El esquema de la prueba es análogo al caso no degenerado (ver [13]).

Empezamos escribiendo a $H_{\alpha\beta}(t, n)$ en una representación conveniente. Dado que $\delta\phi^\alpha = X^{ab}$ es una 2-forma, tiene 6 grados de libertad, por lo que podemos identificar el espacio de los índices griegos con \mathbb{R}^6 , de este modo $H_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$. Para hacer esto usamos alguna elección conveniente de las bases. Un teorema conocido (ver [94]) asegura que si

$$H_{\alpha\beta} = G_{\alpha\gamma} T_\beta^\gamma$$

donde $G_{\alpha\gamma}$ es un producto interno definido positivo en \mathbb{R}^6 , entonces $H_{\alpha\beta}$ es definido positivo si y solo si T_β^γ tiene todos sus autovalores positivos.

Es por esto que calculando los autovalores de T_β^γ podemos encontrar los pares (t_o^a, n_o^a) . Sin embargo, no podemos realizar este calculo para t^a y n_a genéricos. Pero si es posible hacerlo cuando ellos pertenecen a los planos definidos por las direcciones nulas principales. En el frame elegido estos son:

$$t_o^a = (t_0, 0, 0, t_3) \quad ; \quad n_o^a = (n_0, 0, 0, n_3).$$

Tomando $G_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, es posible calcular los 6 autovalores usando Mathe-

matica, ellos son:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= (n_0 - n_3)(t_0 + t_3) \\ \lambda_{3,4} &= (n_0 + n_3)(t_0 - t_3) \\ \lambda_5 &= (n_0 t_0 + n_3 t_3) \alpha_1 \alpha_2 \\ \lambda_6 &= (n_0 t_0 + n_3 t_3) \beta_1 \beta_2\end{aligned}$$

Notemos que para que λ_5 y λ_6 sean positivos tiene que suceder que $\text{signo}(\alpha_1 \alpha_2) = \text{signo}(\beta_1 \beta_2)$. Equivalentemente,

$$0 < \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 = \Omega_1 \Omega_2 \quad (5.30)$$

Esa relación implica que: i) $\text{signo}(\Omega_1) = \text{signo}(\Omega_2)$, es decir, que los conos tiene intersección no vacías; ii) recordando que $\alpha_1 \beta_2 \leq 1 \leq \alpha_2 \beta_1$ (de la prueba de la proposición 26) y por (5.30), concluimos que $\alpha_1 \beta_2 > 0$. Que es exactamente la expresión (5.29).

Asumiendo (5.30), solo hay dos casos para analizar: $\Omega_1, \Omega_2 > 0$, que corresponde a la imagen 5.1a; y $\Omega_1, \Omega_2 < 0$, que corresponde a la imagen 5.1c.

Esos dos casos son considerados a continuación,

- a. Si $\Omega_i > 0$ con $i = 1, 2$, elegimos $t_o^a = (1, 0, 0, 0)$, $n_a^o = (1, 0, 0, 0)$ y obtenemos,

$$\lambda_{1,2,3,4} = 1 \quad ; \quad \lambda_5 = \alpha_1 \alpha_2 > 0 \quad ; \quad \lambda_6 = \beta_1 \beta_2 > 0$$

- b. Si $\Omega_i < 0$ con $i = 1, 2$, elegimos $t_o^a = (0, 0, 0, 1)$, $n_a^o = (0, 0, 0, 1)$ y obtenemos (una vez que el simetrizador es multiplicado por (-1)),

$$\lambda_{1,2,3,4} = 1 \quad ; \quad \lambda_5 = -\alpha_1 \alpha_2 > 0 \quad ; \quad \lambda_6 = -\beta_1 \beta_2 > 0$$

Esto nos lleva a concluir que (5.29) es una condición suficiente para que el sistema sea simétrico hiperbólico. Para probar que es necesaria, debemos justifica que (t_o^a, n_a^o) pertenezcan al plano definidos por las direcciones principales nulas, que llamaremos π . Retomaremos esta parte de la prueba después. Ahora nos concentraremos en estudiar cuales son las vecindades de (t_o^a, n_a^o) donde la condición de positividad todavía se preserva. Descartamos las opciones espaciales (con respecto a las métricas efectivas) dentro de π , ya que en este caso algunos autovalores se vuelven negativos.

Por otro lado, es posible calcular el determinante de T_β^α (con Mathematica), para n_a y t^a generales. Este resulta

$$\begin{aligned}\det(T_\beta^\alpha) &= \Omega_1 \Omega_2 \left(g_1^{ab} n_a n_b \right) \left(g_2^{ab} n_a n_b \right) (n_a t^a)^2 \left(g_{ab}^1 t^a t^b \right) \left(g_{ab}^2 t^a t^b \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6\end{aligned} \quad (5.31)$$

La siguiente discusión se basa en este resultado. Notemos primero que el par encontrado arriba (t_o^a, n_a^o) cumple que $t_o^a \in C_{g_1} \cap C_{g_2}$ y $n_a^o \in C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^*$. En este caso todos los λ_i son positivos y por lo tanto también el determinante (5.31). Si empezamos a mover

(t_o^a, n_a^o) a partir de los originales, los λ_i permanecerán positivos, por continuidad, hasta que alguno se anule, que solo puede suceder cuando (5.31) se anule. Las casos en los que esto ocurre son: (a) n_a se vuelve nulo en g_1^{ab} o g_2^{ab} ; (b) t^a se vuelve nulo en g_{ab}^1 o g_{ab}^2 ; (c) $t^a n_a = 0$. Esto nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 29 Si $t^a \in C_{g_1} \cap C_{g_2}$ y $n_a \in C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^*$, entonces $t^a n_a > 0$.

Prueba. Usando los resultados de la proposición 26 vemos que $C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$ y $C_{g_2} \subseteq C_{g_1}$, por lo que

$$\begin{aligned} C_{g_1} \cap C_{g_2} &= C_{g_2} \\ C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* &= C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^* \end{aligned}$$

Resulta simple, recordando la definición de cono dual, comprobar que si $n_a \in C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$ y $t^a \in C_{g_2}$ se satisface que $t^a n_a > 0$. ■

De este resultado concluimos que si $t^a \in C_{g_2}$ y $n_a \in C_{g_1}^*$ entonces $H_{\alpha\beta}(n, t)$ es definido positivo. Por otro lado, esto nos lleva a concluir que el cono de propagación de los campos físicos es

$$C_H = \bar{C}_{g_1} = \bar{C}_{g_1} \cup \bar{C}_{g_2}$$

Nos resta mostrar que (5.29) es una condición necesaria. Lo hacemos por contradicción, asumamos que $C_{g_1} \cap C_{g_2} = \emptyset$ y que existe un par (t_o^a, n_a^o) tal que se satisface $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, 6$. Si t_o^a (o n_a^o) no pertenecen a ninguno de los conos (o coconos), entonces existe un entorno de ellos donde la positividad se mantiene. Usando el mismo razonamiento del determinante (5.31), vemos que ese entorno no forma un cono convexo, por lo que tenemos una contradicción. La misma vino de suponer que existía (t_o^a, n_a^o) tal que $\lambda_i > 0$. Esto concluye la prueba.

5.6. Ejemplos.

En esta sección presentamos cuatro ejemplos que ilustran el poder de los resultados presentados (para mas ejemplos ver [13]). En cada ejemplo, presentamos el lagrangiano asociado a cada teoría y usando los teoremas 27 y 28, chequeamos cual son las condiciones para que estas sean bien puestas (simétricas hiperbólicas). Además mostramos cuales son los conos de propagación de los campos físicos. Estos últimos serán clasificados en termino de γ_1 para el caso no degenerado $F^2 + G^2 = 0$ y b_1 para el caso degenerado $F = G = 0$. Como muestra el teorema 28 las velocidades de propagación vienen dadas por \bar{C}_{g_1} , y pueden dividirse en los siguientes casos cuando el sistema es no degenerados: (a) super-lumínicas $\gamma_1 < 1$ donde \bar{C}_η (o \bar{C}_σ) $\subseteq \bar{C}_{g_1}$; lumínicas $\gamma_1 = 1$ donde $\bar{C}_{g_1} = \bar{C}_\eta$ (o \bar{C}_σ); sub-lumínicas $\gamma_1 > 1$ donde $\bar{C}_{g_1} \subseteq \bar{C}_\eta$ (o \bar{C}_σ).

Para el caso degenerado la propagación es: (a) sub-lumínicas, $b_1 < 0$ donde $\bar{C}_{g_1} \subseteq \bar{C}_\eta$; (b) lumínicas $b_1 = 0$ donde $\bar{C}_\eta = \bar{C}_{g_1}$; (c) super-lumínicas $0 < b_1$ donde $\bar{C}_\eta \subseteq \bar{C}_{g_1}$.

Para todos los ejemplos considerados, estamos usando un frame donde $\vec{E} \parallel \vec{H}$, tal que $\frac{\sqrt{F^2+G^2}-F}{4} = E^2$ y $\frac{\sqrt{F^2+G^2}+F}{4} = H^2$.

5.6.1. Born-Infeld.

La teoría de Born-Infeld es un ejemplo de electrodinámica no lineal que fue propuesto para remover las divergencias de auto energía del electrón a nivel clásico. La idea fue usar generalizaciones no lineales de la teoría de Maxwell, que se desvíen de la misma para campos grandes. Esto naturalmente introduce un cut off β limitando el campo eléctrico máximo al rededor de una carga estática, de este modo se evita la singularidad cuando $r \rightarrow 0$. La expresión lagrangiana para esta teoría es

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(\sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^4}} + 1 \right)$$

Una de las propiedades importantes de la misma, es la ausencia de birrefringencia, ya que $N_1 = N_2 = 0$, [86]. Las dos métricas efectivas son idénticas por lo que la intersección de los conos es obvia, concluyendo que el sistema es simétrico hiperbólico. Además, la propagación de los modos físicos esta contenida en el cono de luz de la métrica de fondo, por lo que las velocidades de propagación son menores o iguales a la de la luz.

- Caso no degenerado $F^2 + G^2 \neq 0$

Antes de empezar el analisis de hiperbolicidad es importante notar que cuando $\beta^2 \rightarrow \frac{\sqrt{F^2+G^2}-F}{4}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \rightarrow \infty$ y si $\beta^2 < \frac{\sqrt{F^2+G^2}-F}{4}$, \mathcal{L} se vuelve complejo. Esto restringe el rango del campo eléctrico $\frac{\sqrt{F^2+G^2}-F}{4} = E^2 < \beta^2$, que es consistente con la idea original.

Por otro lado, las métricas efectivas estan conformemente relacionadas

donde $g_2^{ab} = \left(\frac{(\beta^2+H^2)(\beta^2-E^2)}{(\beta^2+H^2-E^2)^2} \right) g_1^{ab}$, con $\alpha_1 = \frac{\beta^2+H^2-E^2}{(\beta^2-E^2)}$ y $\beta_1 = \frac{\beta^2+H^2-E^2}{(\beta^2+H^2)}$ definiendo g_1^{ab} .

Es fácil ver que $0 < \alpha_1\beta_2 = 1$, (y $0 < \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = 1$) por lo que la teoría es simétrica hiperbólica.

Además, $\Omega_1 = \frac{1}{\Omega_2} = 4 \frac{(2\beta^2+F)^2}{16(\beta^2+H^2)(\beta^2-E^2)} > 0$ entonces cuando $E^2 < \beta^2$, las métricas efectivas tienen intersección con la métrica de fondo, resultado que coincide (como mencionamos mas arriba) con la condición de un lagrangiano real.

Por otro lado

$$\gamma_1^2 = \left| \frac{\left(1 + \frac{H^2}{\beta^2}\right)}{\left(1 - \frac{E^2}{\beta^2}\right)} \right|$$

de donde concluimos que $1 < \gamma_1^2$, es decir, este es un caso sub-luminico y solo están permitidas velocidades de propagación menores a la de la luz.

- Caso degenerado $F = G = 0$

Estos casos son siempre simétricos hiperbólicos, podemos comprobar la intersección de los conos observando que $g_1^{ab} = g_2^{ab}$, con $b_1 = -\frac{1}{\beta^2} < 0$. Las velocidades de propagación también son menores a la de la luz.

5.6.2. Electrodinámica de la teoría de Kaluza-Klein.

Analizamos dos ejemplos introducidos en [95]. Empezando con una métrica de Kaluza Klein en $5 = d + 1$ dimensiones, y agregando un termino de Gauss-Bonet (que en cinco dimensiones no es un invariante topológico) a la acción de Einstein-Hilbert, concluyendo una teoría efectiva electrodinámica en $d = 3 + 1$ dimensiones.

El lagrangiano resultante es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F + \frac{1}{16}\gamma \left((b-1)F^2 - \frac{3}{2}G^2 \right) \quad (5.32)$$

donde γ es un parámetro de perturbación del Lagrangiano, asociado al término de Gauss-Bonet, este es interpretado como una función de las cantidades físicas (e, m_e, \hbar, c) y b un parámetro asociado a términos en la acción cuadrática en el escalar de Ricci. Este ultimo, es elegido para evitar la propagación de fantasmas.

La condición de simétrico hiperbólico (5.29) $\alpha_1\beta_2 > 0$ es equivalente a $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 > 0$, usaremos esta última ya que es mas fácil de calcular.

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = \frac{\left((F(1-4b)\gamma + 4)^2 - (5\gamma - 2b\gamma)^2 (F^2 + G^2) \right)}{(2F\gamma - 2Fb\gamma + 4)^2} > 0$$

Veremos bajo que condiciones esta desigualdad se cumple para diferentes elecciones de γ y b asociadas a las teorías.

5.6.2.1. Electrodinámica de Gauss-Bonnet.

En esta teoría $b = 1$ y es interpretado como el primer orden de corrección a la relatividad general dado por la teoría de cuerdas [96].

Con $b = 1$, la condición de simétrico hiperbólico se simplifica

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = (1 - 3H^2\gamma) (1 + 3\gamma E^2) > 0 \quad (5.33)$$

Debido a que el *signo*(γ) no esta definido, esto da lugar a diferentes posibilidades.

- Si $\gamma > 0$ la ecuación (5.33) implica $H^2 < \frac{1}{3\gamma}$
 - (i) Caso no degenerado.
 - En este caso la métrica efectiva g_1^{ab} queda definida por los coeficientes $\alpha_1 = 1 - 3H^2\gamma$ y $\beta_1 = 1 + 3\gamma E^2$ y la métrica $g_2^{ab} = \eta^{ab}$ es igual a la de fondo. Esto muestra que la condición de hiperbolicidad

$$\Omega_1 = (1 - 3H^2\gamma) (1 + 3\gamma E^2) > 0$$

es también una condición para que el cono de η^{ab} este incluido en el de g_1^{ab} .

Ya que

$$1 > \gamma_1 = \sqrt{\frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|}} = \sqrt{\frac{1 - 3H^2\gamma}{1 + 3\gamma E^2}} > 0$$

permitiendo velocidades de propagación físicas super-lumínicas.

- (ii) Caso degenerado.

$$b_1 = 3\gamma > 0$$

Por lo que también están permitidas velocidades de propagación super lumínicas.

- Si $\gamma < 0$ la condición de energía dominantes se satisface y (5.33) implica que $E^2 < \frac{1}{3|\gamma|}$, resultado que esta de acuerdo con Gibbons y Herdeiro [95].

La métrica efectiva g_1 es conforme a la de fondo, por lo que tienen el mismo cono

- (i) Caso no degenerado:

$$g_1^{ab} = (1 - 3\gamma (H^2 - E^2))\eta^{ab}$$

- Por lo que la propagación física viene dada por la métrica de fondo. Y g_2^{ab} queda definida por los coeficientes $\alpha_2 = 1 - 3\gamma \frac{E^2}{(1-3\gamma(H^2-E^2))}$ y $\beta_2 = 1 + 3\gamma \frac{H^2}{(1-3\gamma(H^2-E^2))}$.
- (ii) Caso degenerado:

$$g_1^{ab} = \eta^{ab}$$

5.6.2.2. Euler-Heisenberg

La teoría de Euler-Heisenberg tiene $b = \frac{1}{7}$ y $\gamma \propto \alpha$ la constante de estructura fina. Esta teoría es un lagrangiano efectivo para QED debido a correcciones de Loops [60]

- Caso no degenerado.

$$\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 = 270 \frac{\left(\frac{6}{5} - \frac{(7+3\gamma H^2)}{(7-3\gamma E^2)} \right) \left(\frac{(7+3\gamma H^2)}{(7-3\gamma E^2)} - \frac{5}{6} \right)}{\left(6 \left(\frac{(7+3\gamma H^2)}{7-3\gamma E^2} + 1 \right) - \frac{63}{7-3\gamma E^2} \right)^2} > 0$$

El sistema es simétrico hiperbolico cuando:

$$\frac{5}{6} < \frac{(7 + 3\gamma H^2)}{(7 - 3\gamma E^2)} < \frac{6}{5}$$

El análisis de la velocidades de propagación resulta muy complejo, por lo que no se presenta.

- Caso degenerado

$$b_1 = \frac{33}{14}\gamma + \frac{9}{14}|\gamma|$$

Si $\gamma > 0$ entonces $b_1 > 0$ y tenemos propagaciones mayores a la de la luz.

Si $\gamma = 0$ recuperamos la teoría de Maxwell

Si $\gamma < 0$ entonces $b_1 < 0$ y solo son permitidas propagaciones menores a la de la luz.

5.6.3. Teoría de juguete.

El siguiente ejemplo, así como Born-Infeld, tiene $N_1 = N_2 = 0$, por lo que sus métricas efectivas son conformes entre ellas, y por lo tanto el sistema es simétrico hiperbólico para cualquier valor de los campos. Por otro lado, esta teoría tiene la extraña propiedad, que los conos de las métricas efectivas no se intersecan con el cono de la métrica de fondo. Su lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{F}{G}$$

La teoría no está definida para $G = 0$ por lo que no consideramos el caso degenerado.

Como mencionamos $g_1^{ab} = -4\frac{F^2}{G^2}g_2^{ab}$ donde los coeficientes de g_1^{ab} son

$$\alpha_1 = 1 - \frac{H^2}{E^2} \quad \beta_1 = 1 - \frac{E^2}{H^2}$$

Notemos que

$$\Omega_1 = \alpha_1\beta_1 = -\frac{(H^2 - E^2)^2}{H^2E^2} = -4\frac{F^2}{G^2} < 0$$

es negativo para todos los valores de los campos, por lo que $C_{g_1}^* \cap C_\eta^* = \emptyset$ y $C_{g_1}^* \cap C_\sigma^* \neq \emptyset$. Esto significa que los datos iniciales para los campos deben darse en hipersuperficies temporales con respecto a la métrica de fondo, pero espaciales con respecto a las métricas efectivas, la evolución ocurre en direcciones temporales con respecto a estas últimas.

Por otro lado

$$\gamma_1 = \left| \frac{H}{E} \right|$$

por lo que los casos super-lumínicos ocurren cuando $|H| < |E|$.

5.7. Conclusiones.

En este capítulo se estudiaron las ecuaciones cuasi-lineales de la electrodinámica no lineal y se encontró bajo que condiciones las mismas pueden reducirse a un conjunto de ecuaciones simétricas hiperbólicas. Este resultado se encuentra en el teorema 27, cuyo enunciado es: el sistema es simétrico hiperbólico si y solo si los conos temporales ($C_{g_1}^*$) de las dos métricas efectivas g_1^{ab} y g_2^{ab} , surgidas de la relación de dispersión, tienen intersección no vacía, es decir, $C_{g_1}^* \cap C_{g_1}^* \neq \emptyset$. Para demostrar el mismo, estudiamos primero las métricas efectivas usando las direcciones principales nulas de F_{ab} . Estas direcciones nos permitieron elegir frames particulares donde las mismas lucen extremadamente simples y parametrizadas en términos de los coeficientes α_1, β_1 y α_2, β_2 que depende de los campos electromagnéticos F_{ab} (ver ecuaciones (5.16)). Encontramos cuando estas métricas tienen intersección con la métrica de fondo η^{ab} y cuando ellas tienen intersección entre ellas en termino de condiciones algebraicas simples para sus coeficientes (ver proposición 25). Vimos que cuando los conos efectivos tienen intersección, estos se encuentran incluidos entre ellos del siguiente modo $C_{g_1}^* \subseteq C_{g_2}^*$ y $C_{g_2} \subseteq C_{g_1}$ (ver proposición 26). Por otro lado construimos simetrizadores para las ecuaciones diferenciales del sistema, que

no dependen del espacio de fase (no depende de k_a). Y probamos que la condición de positividad del simetrizador se cumple si y solo si $C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* \neq \emptyset$. Esta condición resulta en una expresión algebraica simple $\alpha_1 \beta_2 > 0$; que puede ser monitoreada en cada teoría, confirmando en que caso si la hiperbolicidad se cumple o no. También, usando la definición de Geroch, en el teorema 28 se mostró que el cono de propagación física de cada teoría NLED viene dado por la clausura del cono temporal futuro de su métrica efectiva g_1 (\bar{C}_{g_1}).

Todas estas herramientas se aplicaron a cuatro ejemplos físicos: la teoría electro-dinámica de Born-Infeld, la de Gauss-Bonnet, la de Euler-Heisenberg y un ejemplo de juguete. En todas estas, encontramos restricciones sobre los campos electromagnéticos para que las mismas sean simétricas hiperbólicas. Y obtuvimos que en las tres primeras sus métricas efectivas tienen intersección con la métrica de fondo η_{ab} , pero que esto no sucede para el caso del modelo de juguete. En este último, la propagación de los campos físicos tiene la particularidad que se produce en una dirección espacial con respecto a la métrica η_{ab} . Sin embargo, esta teoría por si sola es perfectamente causal y tiene una formulación de valores iniciales bien puesta, cuyos datos iniciales deben ser elegidos a lo largo de hipersuperficies temporales para la métrica de fondo. Por otro lado, se pudo comprobar que en estos ejemplos hay casos donde los conos de g_{ab}^1 (los de la propagación física), contienen al cono de la métrica de fondo y por lo tanto tenemos permitido propagaciones con velocidades mayores a la de la luz, y casos donde el cono de fondo los incluye, solo permitiendo propagaciones sub-lumínicas (causalidad relativista).

Notemos que ninguna condición de energía fue usada, ya que la condición de simétrico hiperbólico depende de derivadas segundas del lagrangiano, mientras que las condiciones de energía suelen depender solo de derivadas primeras. Hasta cierto punto, las condiciones de energía (a través de la conservación de energía-momento) están relacionadas con la condición de causalidad. Por lo que su imposición probablemente hubiera reducido el conjunto teorías, a solo aquellas donde los conos efectivos tienen intersección con el cono del espacio tiempo.

Por ultimo comentamos que en el artículo [13], pueden encontrarse todas las pruebas no presentadas en este capítulo. En el mismo, también se muestra que en esta clase de teorías NLED, el sistema de vínculos es integrable, es decir, si ellos se cumplen inicialmente, y el sistema de evolución es simétrico hiperbólico, entonces ellos se siguen cumpliendo durante la evolución. También se muestran mas ejemplos de aplicación.

Capítulo 6

Vínculos y bloque L_m^T .

6.1. Introducción.

En este capítulo comentaremos sobre los avances realizados y sobre el trabajo en curso, asociado al estudio de los vínculos y su conexión con los bloques L_m^T .

Consideremos el caso cuasi-lineal

$$\mathfrak{N}_\gamma^{Aa}(x, \phi) \partial_a \phi^\gamma = J^A(x, \phi) \quad (6.1)$$

tal que este sistema tiene un tensor de Geroch C_A^q , con la siguiente propiedad

$$C_A^{(q)} \mathfrak{N}_\gamma^{[A|a)} = 0. \quad (6.2)$$

Usando las mismas coordenadas (t, x^i) , que en los capítulos anteriores, con $n_a := \nabla_a t$ y $t^a = (\partial_t)^a$. La expresión

$$n_q C_A^q \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \partial_a \phi^\gamma - n_q C_A^q J^A = C_A^0 \mathfrak{N}_\gamma^{Ai} \partial_i \phi^\gamma - C_A^0 J^A = 0 \quad (6.3)$$

es una ecuación de vínculo puesto que solo tiene derivadas ∂_i (con $i = 1, \dots, n$) de los campos (ya que $n_q C_A^q \mathfrak{N}_\gamma^{Aa} n_a = 0$). Esta ecuación solo necesita los valores de ϕ^γ sobre la hipersuperficie $\Sigma_t = \{t = \text{cte}\}$ (ver sección 2.2).

Por otro lado, usando la identidad (6.2), vemos que, si $l(\lambda)_a = -\lambda n_a + k_a \in S_{n_a}$, entonces

$$C_A^q l(\lambda)_q = -\lambda C_A^q n_q + C_A^q k_q \quad (6.4)$$

es kernel por izquierda de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a$. Recordando que el grado en λ de los vectores del kernel por izquierda del símbolo principal (ver ec. (D.5)) define los tipos de bloques L_m^T en su descomposición de Kronecker, y observando que (6.4) es lineal en λ , concluimos que C_A^q representa un bloque L_1^T en la descomposición de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a$. O también puede ser un bloque L_0^T , ya que si $C_A^q n_q = 0$ (o $C_A^q k_q = 0$), el vector $C_A^q l(\lambda)_q$ se vuelve de orden 0 en λ . Esto nos permite generalizar la idea, para introducir tensores $C_A^{q_1 \dots q_m}$ que se correspondan con bloques L_m^T con $m \geq 2$ como sigue. Definimos $C_A^{q_1 \dots q_m}$ simétrico en todos sus índices,

$$C_A^{q_1 \dots q_m} = C_A^{(q_1 \dots q_m)} \quad (6.5)$$

tal que

$$C_A^{(q_1 \dots q_m)} \mathfrak{N}_\gamma^{[A|a]} = 0 \quad (6.6)$$

Entonces $C_A^{q_1 \dots q_m}$ representa un bloque L_m^T cuando $C_A^{q_1 \dots q_m} n_{q_1} \dots n_{q_m} \neq 0$, ya que $C_A^{q_1 \dots q_m} l(\lambda)_{q_1} \dots l(\lambda)_{q_m}$ es de orden m en λ y también es kernel por izquierda de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a$. Además

$$n_{q_1} \dots n_{q_m} C_A^{q_1 \dots q_m} (\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} \partial_a \phi^\gamma - J^A) = C_A^{0 \dots 0} (\mathfrak{N}_\gamma^{Ai} \partial_i \phi^\gamma - J^A) = 0 \quad (6.7)$$

es la ecuación de vínculo asociada.

Del mismo modo que C_A^a puede estar asociado a bloques L_1^T o L_0^T , el tensor $C_A^{q_1 \dots q_m}$ puede representar bloques L_l^T con $0 \leq l \leq m$.

A continuación presentamos dos secciones, en la primera estudiamos la integrabilidad de los vínculos cuando todos ellos son del tipo L_1^T o L_0^T . Estos es la generalidad de los casos de los problemas físicos. En la segunda, mostramos como cuando tenemos bloques L_m^T aparecen vínculos “ocultos”.

6.2. Integrabilidad de los vínculos L_0^T y L_1^T .

Consideremos un sistema como (6.1) tal que solo tiene tensores de Geroch $C_{\Gamma A}^q$ correspondientes a bloques L_1^T y L_0^T en la descomposición de Kronecker del símbolo principal. El índice Γ rotula los diferentes tensores.

Introducimos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ba} &:= C_{\Gamma A}^b \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} \rightarrow \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{(ba)} &= 0 \\ \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ba} &= \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{[ba]} \end{aligned} \\ \mathfrak{J}_\Gamma^b &:= C_{\Gamma A}^b \mathfrak{N}_\alpha^{Aa} \end{aligned}$$

de este modo, los vínculos del sistema, ec. (6.3), pueden escribirse como

$$\psi_\Gamma := \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha - \mathfrak{J}_\Gamma^0 = 0. \quad (6.8)$$

Donde hemos introducido los campos ψ_Γ , tal que si ellos son nulos en la hipersuperficie Σ_t , las ecuaciones de vínculos se cumplen sobre la misma.

A continuación presentamos las ecuaciones de evolución que los gobiernan. En función de ellas obtenemos criterios para decidir cuando los mismos son conservados durante la evolución de ϕ^α .

Este resultado es una combinación “nueva” de las ideas presentadas por Reula en [18] y Geroch en [4].

Afirmación 30 *Cuando el sistema (6.1) es fuertemente hiperbólico con una hiperbolización h_A^α y en la dirección n_a , el sistema subsidiario de vínculos tiene la siguiente ecuación de evolución*

$$\partial_t \psi_\Gamma = Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta + \left(\partial_a \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ab} \partial_b \phi^\alpha - \partial_a \mathfrak{J}_\Gamma^a \right) \quad (6.9)$$

Si además para cada $l(\lambda)_a \in S_{n_a}$, el símbolo principal $\mathfrak{N}_\gamma^{Aa} l(\lambda)_a$:

(i) Solo tiene bloques L_1^T en su descomposición de Kronecker, entonces $Y_\Gamma^{i\Delta}$ es diagonalizable con autovalores reales y queda definido por la ecuación

$$k_i \mathfrak{C}_{\Gamma\beta}^{i0} A_\alpha^{\beta j} k_j = k_i Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{C}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j \quad (6.10)$$

Con $A_\alpha^{\beta j} k_j$ definido como en la ec. (2.28).

Si $(\pi(k), v^\alpha)$ son un par autovalor, autovector de $A_\alpha^{\beta j} k_j$, entonces $(\pi(k), \mathfrak{C}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j v^\alpha)$ son el correspondiente par de $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$. Además, todos los autovalores de $Y_\Gamma^{i\Delta}$ surgen de la reducción de los bloques L_1^T , y como vimos en el Lema 24, ellos pueden ser elegidos diferentes a los autovalores generalizados $\lambda_i(k)$ de todo el sistema.

(ii) Solo tiene bloques L_1^T y L_0^T , entonces $Y_\Gamma^{i\Delta}$ queda definido por las ecuaciones

$$Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{J}_\Delta^0 = \mathfrak{C}_{\Gamma\gamma}^{i0} \left((h\mathfrak{N}^0)^{-1} \right)_\beta^\gamma h_A^\beta J^A - \mathfrak{J}_\Gamma^i \quad (6.11)$$

$$\mathfrak{C}_{\Gamma\gamma}^{i0} A_\alpha^{\gamma j} = Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{C}_{\Delta\alpha}^{0j} + \mathfrak{C}_{\Gamma\alpha}^{ij} \quad (6.12)$$

o no esta completamente definido.

Antes de probar esta afirmación comentaremos sobre la misma. Decimos que la “condición de integrabilidad” es valida, cuando, on shell se cumple la ecuación

$$\partial_a \mathfrak{C}_{\Gamma\alpha}^{ab} \partial_b \phi^\alpha - \partial_a \mathfrak{J} = 0, \quad (6.13)$$

obsérvese que es el termino entre paréntesis en (6.9). Es posible que en el caso off shell la expresión sea proporcional a las ecuaciones de evolución $h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{Aa} \partial_a \phi^\beta - h_A^\alpha J^A$ o a los vínculos ψ_Δ .

Asumiendo todas las condiciones de suavidad necesarias en el sistema (6.9) y que la condición de integrabilidad es valida, concluimos que: en el caso (i), el sistema subsidiario de vínculos es fuertemente hiperbólico y por lo tanto la única solución de los vínculos es $\psi_\Gamma = 0$ (dado que $\phi^\alpha|_{t=0}$ es elegido para que $\psi_\Gamma|_{t=0} = 0$ inicialmente). En el caso (ii) no es posible asegurar que $Y_\Gamma^{i\Delta}$ sea diagonalizable, por lo que no podemos concluir nada en principio. Sin embargo, suele suceder que $Y_\Gamma^{i\Delta}$ no es único y que tenemos una cierta libertad para elegirlo (como se explica en la prueba a continuación), permitiendo elegirlo diagonalizable y con autovalores reales, de modo tal que el sistema resulta fuertemente hiperbólico y los vínculos son bien comportados.

Notemos que en el caso (i) y debido a la ecuación (6.10), las velocidades de propagación de los vínculos (autovalores de $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$) son un subconjunto de las velocidades de propagación del sistema de evolución de ϕ^α (autovalores de $A_\alpha^{\beta j} k_j$). Los modos característicos también son heredados como se explica en (i).

Prueba. Probaremos primero la ecuación (6.9). Debido a que el espacio de ecuaciones de evolución $E^\alpha := h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{Aa} \partial_a \phi^\beta - h_A^\alpha J^A$ y el espacio de vínculos $\psi_\Delta := \mathfrak{C}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha - \mathfrak{J}_\Gamma^0$ expanden el espacio de ecuaciones. Cualquier combinación lineal de las ecuaciones (6.1), debe ser combinación lineal de E^α y ψ_Δ . En particular, si contraemos (6.1) con $C_{\Gamma A}^i$ deben existir $P_{\Gamma\alpha}^i$ y $Y_\Gamma^{i\Delta}$ tal que (off shell)

$$P_{\Gamma\alpha}^i E^\alpha - Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta = \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha - \mathfrak{J}_\Gamma^i \quad (6.14)$$

Por lo que expresando ψ_Δ como en (6.8) concluimos que

$$P_{\Gamma\alpha}^i E^\alpha = \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \left(Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \right) \partial_j \phi^\alpha - Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{J}_\Delta^0 - \mathfrak{J}_\Gamma^i \quad (6.15)$$

Consideramos esta expresión on shell (el lado izquierdo se anula) y derivando respecto de ∂_i

$$0 = \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \partial_i \phi^\alpha + \partial_i Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta + Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta - \partial_i \mathfrak{J}_\Gamma^i$$

usando la antisimetría de $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij}$ en i, j , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha + \partial_i Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta + Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta - \partial_i \mathfrak{J}_\Gamma^i \\ &= \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \partial_t (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \phi^\alpha) - \partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha + \partial_i Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta \\ &\quad + Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta - \partial_i \mathfrak{J}_\Gamma^i \end{aligned}$$

dado que $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} = -\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0i}$ y $\psi_\Gamma := \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha - \mathfrak{J}_\Gamma^0$,

$$0 = \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha - \partial_t (\psi_\Gamma + \mathfrak{J}_\Gamma^0) - \partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha + \partial_i Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta + Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta - \partial_i \mathfrak{J}_\Gamma^i$$

por lo que

$$\partial_t \psi_\Gamma = Y_\Gamma^{i\Delta} \partial_i \psi_\Delta + \partial_i Y_\Gamma^{i\Delta} \psi_\Delta + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha - \partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha - \partial_a \mathfrak{J}_\Gamma^a$$

Solo resta probar que $\partial_a (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ab} \partial_b \phi^\alpha) = \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha - \partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha$ para concluir (6.9). Veamos que esto es así.

$$\begin{aligned} &\partial_a (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ab} \partial_b \phi^\alpha) \\ &= \partial_a (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ab} \partial_b \phi^\alpha) \\ &= \partial_t (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{00} \partial_0 \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha) + \partial_i (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha) \\ &= \partial_t (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha) + \partial_i (\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha) \\ &= \partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_j \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_t \partial_j \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \partial_t \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_i \partial_j \phi^\alpha \\ &= -\partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{j0} \partial_j \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} \partial_t \partial_j \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_i \partial_t \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha \\ &= -\partial_t \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{j0} \partial_j \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \partial_t \phi^\alpha + \partial_i \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_j \phi^\alpha \end{aligned}$$

donde usamos que $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{00} = 0$, $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0j} = -\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{j0}$ y $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \partial_i \partial_j = 0$.

Comprobemos ahora que (6.10), (6.11) y (6.12) son correctas. Para ello consideramos la ecuación off shell (6.15) y dado que $E^\alpha = P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{A0} \partial_t \phi^\beta - P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha J^A + P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{Aj} \partial_j \phi^\beta$, concluimos que

$$\begin{aligned} P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{A0} &= \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{i0} \\ P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{Aj} &= Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij} \\ -P_{\Gamma\alpha}^i h_A^\alpha J^A &= -Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{J}_\Delta^0 - \mathfrak{J}_\Gamma^i \end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos despejar $P_{\Gamma\alpha}^i$ invirtiendo $h_A^\alpha \mathfrak{N}_\beta^{A0}$,

$$P_{\Gamma\alpha}^i = \mathfrak{E}_{\Gamma\beta}^{i0} \left((h\mathfrak{N})^{-1} \right)_\alpha^\beta,$$

reemplazando esta expresión en la tercera concluimos (6.11) y reemplazando en la segunda

$$\mathfrak{E}_{\Gamma\gamma}^{i0} A_\alpha^{\gamma j} = Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{ij},$$

que es (6.12). Donde usamos que

$$A_\alpha^{\gamma j} := \left((h\mathfrak{N})^{-1} \right)_\beta^\gamma h_A^\gamma \mathfrak{N}_\alpha^{Aj}$$

Por lo que contrayendo con $k_i k_j$ obtenemos (6.10).

Problemas (i): si todos los bloques de Kronecker de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aal}(\lambda)_a$ son L_1^T eso significa que no existe W^Γ tal que $W^\Gamma C_{\Gamma A}^i k_i = 0$, ya que si existiera

$$\frac{1}{\lambda} W^\Gamma C_{\Gamma A}^q l(\lambda)_q = -C_{\Gamma A}^0 + \frac{1}{\lambda} W^\Gamma C_{\Gamma A}^i k_i = -C_{\Gamma A}^0$$

pertenecería al kernel por izquierda de $\mathfrak{N}_\gamma^{Aal}(\lambda)_a$, puesto que es combinación lineal de elementos del kernel. Pero $-C_{\Gamma A}^0$ no depende de λ , por lo que definiría un bloque L_0^T , que por hipótesis no puede estar. Esto indica que $C_{\Gamma A}^i k_i$ tiene rango máximo, debido a que \mathfrak{N}_α^{A0} también tiene rango máximo, concluimos que $\mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j = -C_{\Gamma A}^i k_i \mathfrak{N}_\alpha^{A0}$ tiene rango máximo y por lo tanto la ecuación (6.10) define completamente a $k_i Y_\Gamma^{i\Delta}$.

Por otro lado, si $(\pi(k), v^\alpha)$ son un par autovalor y autovector de $A_\alpha^{\beta j} k_j$ entonces contrayendo (6.10) con v^α , tenemos que

$$\begin{aligned} k_i Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j v^\alpha &= k_i \mathfrak{E}_{\Gamma\beta}^{i0} A_\alpha^{\beta j} k_j v^\alpha \\ k_i Y_\Gamma^{i\Delta} \mathfrak{E}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j v^\alpha &= \pi(k) k_i \mathfrak{E}_{\Gamma\beta}^{i0} v^\beta \end{aligned}$$

Mostrando que $(\pi(k), \mathfrak{E}_{\Gamma\beta}^{i0} v^\beta)$ son el correspondiente par para $k_i Y_\Gamma^{i\Delta}$. Consideremos ahora un par $(\lambda_i(k), \delta\phi^\alpha)$ autovalor, autovector generalizados del sistema completo. Es decir

$$(-\lambda_i(k) \mathfrak{N}_\alpha^{A0} + \mathfrak{N}_\alpha^{Ai} k_i) \delta\phi^\alpha = 0,$$

contrayendo esta expresión con $C_{\Gamma A}^0$ obtenemos

$$(-\lambda_i(k) \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{00} + \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0i} k_i) \delta\phi^\alpha = \mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0i} k_i \delta\phi^\alpha = 0$$

Mostrando que $\mathfrak{E}_{\Gamma\alpha}^{0i} k_i \delta\phi^\alpha$ es nulo, por lo que no puede ser un autovector de $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$. Concluimos que $(\pi(k), \mathfrak{E}_{\Gamma\beta}^{i0} v^\beta)$ son el par surgido de la reducción de los bloques L_1^T .

(ii) De la prueba (i) vemos que cuando el símbolo principal tiene alguna fila L_0^T , el término $\mathfrak{C}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j$ no tiene rango máximo. Supongamos que tenemos $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$ cumpliendo (6.10) y existe $W_\Gamma^{i\Delta} k_i$ tal que $W_\Gamma^{i\Delta} k_i \mathfrak{C}_{\Delta\alpha}^{0j} k_j = 0$ entonces $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i + W_\Gamma^{i\Delta} k_i$ también cumple (6.10). Por lo que esta ecuación, no define unívocamente a $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$. En general esta libertad es usada para elegir $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$ diagonalizable, ver ejemplo 2 en [18].

Sin embargo, puede suceder que las expresiones (6.11) y (6.12) si definan completamente a $Y_\Gamma^{i\Delta} k_i$ (las mismas fueron probadas mas arriba). O que no lo hagan. ■

6.3. Vínculos ocultos y bloques L_m^T con $m \geq 2$.

Consideremos solo la parte principal de la ecuación de Killing $\partial_{(a}\xi_{b)} = 0$ en \mathbb{R}^2 y estudiemos su problema de valores iniciales. Escribiéndola en coordenadas

$$\begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ \partial_x & \partial_t \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.16)$$

Observando el símbolo principal de esta ecuación vemos que su descomposición de Kronecker es un bloque L_2^T . Aunque el calculo involucra el uso del kernel por izquierda del símbolo, haciendo los reemplazos $\partial_t \rightarrow \lambda$ y $\partial_x \rightarrow 1$ podemos reconocer el bloque L_2^T .

Por otro lado, si t define la dirección de evolución, vemos de (6.16) que $\psi_1 := \partial_x \xi_1 = 0$ es un vínculo del sistema. Notemos que, derivando la segunda ecuación respecto de ∂_x , la tercera respecto de ∂_t y restándolas obtenemos

$$\psi_2 := \partial_x^2 \xi_0 = 0$$

Este termino es un vínculo oculto del sistema, puesto que corresponde a una variable diferente a la que aparece en ψ_1 . Es posible generalizar esta idea y comprobar que en general los bloques L_2^T tienen vínculos ocultos de orden 2 en las derivadas. Y que los sistemas con bloques L_m^T tienen vínculos ocultos de hasta orden m en las derivadas. De algún modo, esto justifica que en sistemas físicos no aparezcan esta clase de bloques con $m \geq 2$.

Por otro lado, aunque no es necesario que la ecuación de killing tenga una evolución fuertemente hiperbólica, elijamos una de este modo y veamos que sucede con el sistema subsidiario de vínculos.

En particular, elegimos la evolucion simétrica hiperbólica

$$\begin{pmatrix} \partial_t & \partial_x \\ \partial_x & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.17)$$

sumando un termino de vinculo ψ_1 a la primera ecuación de (6.16). Por lo que tomando derivadas temporales de ψ_1 y ψ_2 , y usando (6.17), es simple comprobar que el sistema subsidiario para los vínculos es

$$\partial_t \psi_1 = -\psi_2$$

$$\partial_t \psi_2 = \partial_x^2 \psi_1$$

Derivando la segunda expresión respecto de ∂_t obtenemos una ecuación de onda para ψ_2

$$\partial_t^2 \psi_2 = -\partial_x^2 \psi_2$$

De donde concluimos que si $\psi_1|_{t=0} = \psi_2|_{t=0} = 0$ entonces ambos se mantienen nulos durante la evolución (6.17).

6.4. Conclusiones.

En este capítulo hemos estudiado la conexión entre los bloques L_m^T , surgidos de la descomposición de Kronecker del símbolo principal, con los vínculos. Vimos que cuando los vínculos son del tipo de Geroch, los bloques son del tipo L_0^T y L_1^T . En este caso, obtuvimos una expresión explícita para la evolución del sistema subsidiario de vínculos ec. (6.9). Probamos que cuando los bloques son solo del tipo L_1^T y las condiciones de integrabilidad (6.13) se cumplen, el sistema de vínculos subsidiario parece tener una evolución fuertemente hiperbólica y por lo tanto los vínculos se conservan durante la evolución. Aunque no mostramos los cálculos en esta tesis, es posible probar que las ecuaciones ADM, linealizadas, densitizadas y pseudo-diferenciales en el mismo formato que las trabajadas en [41], tienen la siguiente estructura de Kronecker $8 \times J_1$, $4 \times L_1^T$, donde el sistema subsidiario de vínculos es fuertemente hiperbólico y las ecuaciones de integrabilidad vienen garantizadas por la identidad de Bianchi.

Cuando aparecen filas L_0^T , como en caso de Klein Gordon, estudiado en la sección 4.4. El sistema subsidiario de vínculos tiene un símbolo principal que no necesariamente esta completamente definido, por lo que debe estudiarse en cada ejemplo particular, si con sus libertades extras, se puede concluir una evolución fuertemente hiperbólica. En el caso de BSSN, también siguiendo los lineamientos de [41], la estructura de Kronecker es $8 \times J_1$, $7 \times L_1^T$, $6 \times L_0^T$. En este caso, también es posible ver que los vínculos se mantienen durante la evolución.

Es interesante mencionar que en el caso de las teorías electrodinámicas no lineales, como las estudiadas en el capítulo anterior, la conservación de los vínculos se hizo comprobando la validez de la condición de integrabilidad (6.13), ver [13].

Por último, también se generalizó la definición de Geroch para vínculos, introduciendo los tensores (6.5), asociados a bloques L_m^T con $m \geq 2$. Se observó, usando un ejemplo, que cuando el sistema tiene estos bloques L_m^T , aparecen vínculos ocultos de hasta orden m en derivadas. Ejemplos de estos casos son la ecuaciones de Killing y de tensores de Killing. En dos dimensiones es fácil observar esta estructura. Aunque los cálculos no fueron presentados aquí, es posible probar que en mayores dimensiones estos bloques aparecen combinados con otros bloques L_1^T .

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro.

En esta tesis hemos estudiado la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden en derivadas parciales, en sistemas que tienen vínculos diferenciales. Mas específicamente, nos hemos enfocado en encontrar criterios para decidir cuando este conjunto de ecuaciones diferenciales tiene alguna reducción, tal que el conjunto de ecuaciones de evolución surgidas de la misma, es fuertemente hiperbólico y por lo tanto bien puesto. En el caso cuasi-lineal hemos encontrado una condición necesaria: los valores singulares perturbados (en un parámetro ε), del símbolo principal de la teoría, deben ser solo de ordenes $O(\varepsilon^0)$ y $O(\varepsilon^1)$. Hemos mostrado que esta condición es muy facil de chequear, por lo que es una herramienta poderosa para descartar teorías. La misma nos a permitido mostrar que la teoría electrodinámica de Force Free escrita en su versión de potenciales de Euler y los fluidos cargados con conductividad finita son débilmente hiperbólicos.

Por otro lado, en el caso de coeficientes constantes hemos encontrado una condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga un hiperbolizador. Esta es, que los ángulos principales entre ciertos subespacios asociados al kernel por derecha y por izquierda del símbolo principal estén acotados entre 0 y algún ángulo máximo menor que $\frac{\pi}{2}$. Cuando esto sucede, hemos mostrado como construir explícitamente reducciones, tal que las velocidades de propagación de los vínculos pueden ser elegidas arbitrariamente. Para ello usamos la descomposición de Kronecker del símbolo principal, que en estos casos, solo presenta bloques de Jordan de dimensión 1 y bloques L_m^T . Esto nos permitió, encontrar reducciones para estos bloques y culminar con hiperbolizadores. Como ejemplo de aplicamos, usando estas herramientas encontramos hiperbolizaciones para la teoría de Klein Gordon.

Hemos estudiado la electrodinámica no lineal surgida de lagrangianos arbitrarios de los invariantes electromagnéticos. Y hemos probado que estos sistemas son simétricos hiperbólicos (construyendo explícitamente el hiperbolizador), si y solo si, los conos temporales de sus dos métricas efectivas, surgidas de la relacion de dispersion, tienen intersección no vacía. Esta condición puede garantizarse monitoreando una cantidad escalar que depende de los campos y nos permite conocer en que sectores el sistema es simétrico hiperbólico y en cuales no. Hemos aplicado esta herramienta a diferentes ejemplos de

interés físico.

Por último, hemos estudiado la conexión entre vínculos y bloques L_m^T . Observamos que los problemas físicos, solo presentan vínculos del tipo de Geroch, es decir, solo con bloques L_0^T y L_1^T . Esto tiene sentido, ya que también hemos mostrado que la aparición de bloques L_m^T con $m \geq 2$, introduce vínculos ocultos (que no aparecen en los problemas físicos) al sistema, de hasta m derivadas. Estos vínculos ocultos deben satisfacerse en el dato inicial y en la evolución, de cualquier solución del sistema. De algún modo, los 1's en estos bloques L_m^T se corresponden a vínculos y los λ 's representan derivadas temporales. Por otro lado, en los casos L_1^T y L_0^T hemos encontrado ecuaciones de evolución para el sistema subsidiario de vínculos, que parecen tener una evolución fuertemente hiperbólica siempre que el sistema completo tenga una hiperbolización. Además, hemos encontrado una condición de integrabilidad asociada a términos de menor orden en derivadas. Es necesario que la misma se cumpla para que los vínculos se mantengan satisfechos fuera de la superficie inicial.

El desarrollo de esta teoría, asociada a reducciones y a vínculos, todavía no está completo. Por lo que tenemos varias preguntas y nuevas líneas de trabajo, mencionamos algunas:

Estudiar las condiciones de suavidad y analiticidad en las reducciones, que generalicen nuestros resultados al caso cuasi-lineal. ¿Es realmente necesaria la analiticidad para probar que las velocidades de propagación son finitas?.

Estudiar los vínculos ocultos asociados a bloques L_m^T con $m \geq 2$ y desarrollar una formulación de valores iniciales para los sistemas subsidiarios de vínculos. Calcular cuáles son las condiciones de integrabilidad en esos casos y comprender cuando tienen evoluciones fuertemente hiperbólicas. ¿Existen teorías físicas relevantes que tengan esta clase de bloques y por lo tanto vínculos ocultos?

Estudiar la ventaja de introducir vínculos artificiales en teorías particulares que simplifique los problemas y permitan obtener soluciones analíticas y/o numéricas. Lo interesante de esta idea, es comprender como elegir estos vínculos para que solo produzcan bloques L_1^T y L_0^T (que no generan vínculos ocultos) y con condiciones de integrabilidad satisfechas.

Estudiar la formulación de valores iniciales del sistema $G_{ab}[g] = 0$ y $\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$, para las variables g_{ab} y ξ_a , donde G_{ab} es el tensor de Einstein, ξ_b un vector de Killing y g_{ab} la métrica del sistema. Obtener ecuaciones de evolución para el sistema subsidiario de vínculos y condiciones de integrabilidad. Realizar el mismo estudio con tensores de Killing.

En el desarrollo de esta tesis, siempre estamos considerando que las libertades de Gauge ya han sido fijadas antes de realizar nuestro análisis. De este modo, obtenemos que la descomposición de Kronecker del símbolo principal se simplifica. Un resultado interesante sería, entender como se relacionan las libertades de gauge de una teoría con los otros bloques de Kronecker no incluidos aquí.

Estudiar como realizar extensiones de las teorías, incluyendo campos extras, a sistemas sin vínculos y fuertemente hiperbólicos. De modo tal que cuando estos campos evolucionan trivialmente nulos, obtenemos soluciones del sistema original. Dos ejemplos

conocidos de este mecanismo son el divergence cleaning para la electrodinámica de Maxwell [97], y el Z4 en el caso de las ecuaciones de Einstein [98]. Contamos con un esquema propuesto por nosotros para realizar extensiones de forma genérica. Para ello usamos la descomposición de Kronecker del símbolo principal, y vemos que cuando solo aparecen bloques L_0^T o L_1^T , el esquema parece funcionar. Por otro lado, es posible probar (usando las herramientas del capítulo 3), que para poder extender un sistema, el mismo tiene que ser hiperbolizable, de otro modo, no es extendible. Por lo que toda la tecnología desarrollada hasta aquí, sigue siendo necesaria.

Apéndice A

Descomposición en valores singulares

En este apéndice vamos a introducir la descomposición en valores singulares (SVD) para operadores que mapean entre dos espacios vectoriales de dimensión finita, tal que el espacio de llegada tiene dimensión mayor o igual al de partida.

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_\beta^A : \Phi_R &\longrightarrow \Psi_L \\ \delta\phi^\beta &\longrightarrow \mathfrak{N}_\beta^A \delta\phi^\beta\end{aligned}$$

con $e := \dim \Psi_L \geq \dim \Phi_R =: u$. Para una introducción en el tema ver [53], [99], [100], [29]. La característica de esta descomposición que mas aprovecharemos en este trabajo, es que nos permite conocer las dimensiones de la imagen y del kernel de un operador en termino de cantidades llamadas valores singulares. Además, en el caso de matrices cuadradas, nos da información acerca de la descomposición de Jordan, como es mostrado en la sección 3.3 y en el caso de matrices rectangulares de la descomposición de Kronecker, como veremos en el capítulo 4.

Un problema de la SVD es que necesitamos introducir estructura extra al operador, es decir, productos internos que llamaremos $G_{2\alpha\beta}$ y G_{1AB} en Φ_R y Ψ_L respectivamente ¹.

Definimos la adjunta de un operador

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}^* &= G_2^{-1} \circ \bar{\mathfrak{N}}' \circ G_1 : \Psi_L \longrightarrow \Phi_R \\ (\mathfrak{N}^*)_A^\alpha &= (G_2^{-1} \circ \bar{\mathfrak{N}}' \circ G_1)_A^\alpha = G_2^{\alpha\beta} \bar{\mathfrak{N}}_\beta^B G_{1BA}\end{aligned}$$

donde $G_2^{\alpha\beta} G_{2\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ y $G_1^{AB} G_{1BC} = \delta_C^A$. Estos últimos son los operadores identidad en Φ_R y Ψ_L respectivamente.

Combinando el operador y su adjunta, calculamos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N} &= G_2^{-1} \circ \bar{\mathfrak{N}}' \circ G_1 \circ \mathfrak{N} : \Phi_R \longrightarrow \Phi_R \\ \delta\phi^\gamma &\longrightarrow G_2^{\alpha\beta} \bar{\mathfrak{N}}_\beta^B G_{1BA} \mathfrak{N}_\gamma^A \delta\phi^\gamma\end{aligned}$$

¹Un problema que suele aparecer con su introducción cuando ellos son usados en espacios vectoriales sobre variedades con métricas lorentzianas, es que estos pueden introducir expresiones no covariantes.

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} \circ \mathfrak{N}^* &= \mathfrak{N} \circ G_2^{-1} \circ \tilde{\mathfrak{N}}' \circ G_1: \Psi_L \longrightarrow \Psi_L \\ l^C &\longrightarrow \mathfrak{N}_\alpha^A G_2^{\alpha\beta} \tilde{\mathfrak{N}}_\beta^B G_{1BC} l^C\end{aligned}$$

Ya que $G_2 \circ \mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N}$ y $G_1 \circ \mathfrak{N} \circ \mathfrak{N}^*$ son formas Hermíticas semipositivas, $\mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{N}^*$ son diagonalizables con autovalores reales y semipositivos (positivos o nulos). La raíz cuadrada de esos autovalores son los valores singulares de \mathfrak{N} y \mathfrak{N}^* respectivamente.

Con esas definiciones, presentamos la descomposición en valores singulares. De ahora en adelante los índices mayúsculas de imprenta con sombrero $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$ son índices que corren de $1, \dots, e$ y los griegos con sombrero $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \dots$ de $1, \dots, u$ a menos que se especifique lo contrario. Esos índices etiquetaran diferentes autovectores dentro de alguna base.

Teorema 31 Consideremos $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*, G_1$ y G_2 como antes y tal que $e \geq u$. Supongamos que $\text{rango}(\mathfrak{N}) = r$ (por lo que $\dim(\ker \text{der}(\mathfrak{N})) = u - r$), entonces la descomposición en valores singulares de \mathfrak{N} es

$$\mathfrak{N}_\alpha^A = U_{\tilde{A}}^A \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{A}} (V^{-1})_{\alpha}^{\tilde{\beta}}$$

donde $\begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{e \times u}$ con $\Sigma_+ = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_u = 0$. Donde todos σ_l con $l = 1, \dots, u$ son reales, y son llamados valores singulares de \mathfrak{N} , ellos son las raíces cuadrada de los autovalores de $\mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N}$.

Además, las columnas de U y V son autovectores de las autobases de $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{N}^*$ y $\mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N}$ respectivamente tal que ellas son ortogonales

$$\bar{U}_{\tilde{A}}^A G_{1AB} U_{\tilde{B}}^B = \delta_{\tilde{A}\tilde{B}} = \text{diag}(1, \dots, 1, 1, \dots, 1) \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{V}_{\tilde{\alpha}}^\alpha G_{2\alpha\beta} V_{\tilde{\beta}}^\beta = \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \text{diag}(1, \dots, 1) \quad (\text{A.2})$$

Vamos a discriminar $V_{\tilde{\alpha}}^\alpha = (V_2, V_1)_{\tilde{\alpha}}^\alpha$ y $U_{\tilde{A}}^A = (U_2, U_1, U_3)_{\tilde{A}}^A$ donde V_2 son las primeras r columnas y V_1 las siguientes $u - r$ de V ; U_2 son las primeras r columnas, U_1 las siguientes $u - r$ y U_3 las $e - u$ restantes de U .

El proceso para realizar la descomposición consiste en calcular las columnas de V como autovectores de $\mathfrak{N}^* \circ \mathfrak{N}$ y orthogonalizarlas de tal forma que cumplan (A.2). En ese calculo también se obtiene Σ_+ . Después definimos U_2 como

$$(U_2, 0, 0)_{\tilde{A}}^A \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{A}} := \mathfrak{N}_\alpha^A V_{\tilde{\beta}}^\alpha$$

y completamos U_1 y U_3 tal que cumplan (A.1) y sean autovectores asociados al autovalor nulo de $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{N}^*$.

Una forma sencilla de entender la SVD es pensar que las métricas G_1 y G_2 definen un conjunto de transformaciones (“rotaciones”) dadas por las ecuaciones (A.1) y (A.2). Por lo que la SVD resulta en encontrar aquellas “rotaciones” U y V tal que

$$(U^{-1})^{\tilde{A}}_{\tilde{A}} \mathfrak{N}^A_{\tilde{\beta}} V^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\tilde{A}}_{\tilde{\beta}}. \quad (\text{A.3})$$

Así como en el caso de matrices cuadradas, las bases que llevan una matriz a su descomposición de Jordan no son únicas, las bases U y V que realizan la SVD tampoco lo son. Es decir, para productos internos fijos $G_{1,2}$ podemos elegir diferentes bases ortogonales de los autoespacios asociados a un mismo valor singular y obtener diferentes U y V . Sin embargo los valores singulares permanecen invariantes mientras que $G_{1,2}$ lo hagan.

Las dimensiones y la forma de los kernels, en termino de esta descomposición, vienen dadas por el siguiente corolario.

Corolario 32 *En las condiciones del teorema anterior*

$$\dim(\ker_der(\mathfrak{N})) = u - r$$

$$\dim(\ker_izq(\mathfrak{N})) = e - r$$

$$\dim(rango_Col(\mathfrak{N})) = \dim(rango_filas(\mathfrak{N})) = r.$$

Formulas de los kernel por derecha e izquierda

$$\mathfrak{N}^A_{\alpha}(0, V_1)^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} = 0 \text{ con } \tilde{\alpha} = r + 1, \dots, u$$

$$\delta^{\tilde{C}\tilde{A}}(0, U_1, U_3)^A_{\tilde{A}} G_{AB} \mathfrak{N}^B_{\alpha} = 0 \text{ con } \tilde{A}, \tilde{C} = r + 1, \dots, e$$

donde $\delta^{\tilde{C}\tilde{A}} = diag(1, \dots, 1)$.

La SVD es similar a la descomposición de Jordan para operadores cuadrados. En particular, ellos coinciden cuando el operador es diagonalizable con autovalores reales, semipositivos y usando $G_{1,2}$ particulares.

Supongamos $A^{\alpha}_{\beta} : \Phi_R \longrightarrow \Phi_R$ diagonalizable, tal que $A^{\alpha}_{\beta} = P^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} (P^{-1})^{\tilde{\beta}}_{\beta}$ con $\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_u)$ con $\lambda_i \geq 0$ reales. Si consideramos $G_{1\alpha\beta} = G_{2\alpha\beta} := \overline{(P^{-1})^{\tilde{\alpha}}_{\alpha}} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} (P^{-1})^{\tilde{\beta}}_{\beta}$ entonces

$$\begin{aligned} (A^* \circ A)^{\alpha}_{\beta} &= G_2^{\alpha\gamma} \overline{A^{\eta}_{\gamma}} G_{1\eta\varphi} A^{\varphi}_{\beta} \\ &= \left(P^{\alpha}_{\tilde{\alpha}_1} \delta^{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1} \bar{P}^{\gamma}_{\tilde{\beta}_1} \right) \left(\bar{P}^{\eta}_{\tilde{\alpha}_2} \bar{\Lambda}^{\tilde{\alpha}_2}_{\tilde{\beta}_2} (\bar{P}^{-1})^{\tilde{\beta}_2}_{\gamma} \right) \left((\bar{P}^{-1})^{\tilde{\alpha}_3}_{\eta} \delta_{\tilde{\alpha}_3 \tilde{\beta}_3} (P^{-1})^{\tilde{\beta}_3}_{\varphi} \right) \\ &\quad \left(P^{\varphi}_{\tilde{\alpha}_4} \Lambda^{\tilde{\alpha}_4}_{\tilde{\beta}_4} (P^{-1})^{\tilde{\beta}_4}_{\beta} \right) \\ &= P^{\alpha}_{\tilde{\alpha}_1} \left(\delta^{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1} \Lambda^{\tilde{\alpha}_2}_{\tilde{\beta}_1} \delta_{\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2} \Lambda^{\tilde{\beta}_2}_{\tilde{\gamma}} \right) (P^{-1})^{\tilde{\gamma}}_{\beta} \\ &= P^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} (\Lambda^2)^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\gamma}} (P^{-1})^{\tilde{\gamma}}_{\beta} \end{aligned}$$

De donde concluimos que los autovalores de $A^* \circ A$ son λ_i^2 , y por lo tanto los valores singulares de A son λ_i . Además $U = V = P$ y la condición de ortogonalidad se cumple ya que $\overline{P^\alpha_\alpha} G_{2\alpha\beta} P^\beta_{\tilde{\beta}} = \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$.²

Notemos que la deducción fue hecha usando que $\delta^{\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1} \Lambda^{\tilde{\alpha}_2}_{\tilde{\beta}_1} \delta_{\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2} \Lambda^{\tilde{\beta}_2}_{\tilde{\gamma}} = (\Lambda^2)^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\gamma}}$, ya que A es diagonalizable con autovalores reales. Pero si Λ tiene bloques de Jordan, entonces los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores de $\delta^{\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1} \Lambda^{\tilde{\alpha}_2}_{\tilde{\beta}_1} \delta_{\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2} \Lambda^{\tilde{\beta}_2}_{\tilde{\gamma}}$, cuyo calculo explicito se vuelve complicado incluso para bloques de Jordan no muy grandes. En la sección 3.4 se muestra el análisis de una matriz de 2×2 .

²El resultado estándar en libros de texto es $G_{1\alpha\beta} = G_{2\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \overline{(P^{-1})^\alpha_\alpha} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} (P^{-1})^\beta_{\tilde{\beta}}$ que significa que $(P)^\alpha_{\tilde{i}}$ es ortogonal, y la matriz A^α_β es "simétrica".

Apéndice B

Invariancia de los ordenes de los valores singulares.

En el capítulo 3 estudiamos perturbaciones de los valores singulares en términos de algún parámetro pequeño ε y usamos los ordenes en ε (cuando $\varepsilon \rightarrow 0$), para decidir cuando una teoría, puede o no, ser fuertemente hiperbólicas. Pero como vimos en el apéndice A (cuya notación también es usada en este apéndice), los valores singulares dependen de dos formas Hermíticas o productos internos, por lo que necesitamos mostrar que los ordenes (en ε) de esos valores singulares, permanecen invariantes cuando los elegimos diferentes productos internos. Esto es probado en el Lema 33. Por otro lado en el teorema 34, vemos como calcular expresiones explícitas para el primer orden en la perturbación cuando ciertas bases particulares son elegidas.

Consideremos ahora dos pares de productos internos G_{1AB} , $G_{2\alpha\beta}$ y \hat{G}_{1AB} , $\hat{G}_{2\alpha\beta}$ en los espacios Ψ_L y Φ_R respectivamente. Ya que son positivos definidos, estos son equivalentes, es decir, existen $U : \Psi_L \rightarrow \Psi_L$ y $V : \Phi_R \rightarrow \Phi_R$ invertibles, tal que

$$\bar{U}_A^C \hat{G}_{1CD} U_B^D = G_{1AB} \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{V}_\alpha^\gamma \hat{G}_{2\gamma\eta} V_\beta^\eta = G_{2\alpha\beta}. \quad (\text{B.2})$$

Consideraremos ahora el operador lineal $\mathfrak{T}_\alpha^A : \Phi_R \rightarrow \Psi_L$ con $e := \dim \Psi_L \geq \dim \Phi_R =: u$ tal que $\mathfrak{T}_\alpha^A = \mathfrak{N}_\alpha^A + \varepsilon e^{i\theta} E_\alpha^A$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$ y donde $\varepsilon e^{i\theta} E_\alpha^A$ representa un término de perturbación. Usamos la siguiente notación, llamamos $\hat{\sigma}_i[\mathfrak{T}_\alpha^A]$ los valores singulares de \mathfrak{T}_α^A definidos usando \hat{G}_{1CD} , $\hat{G}_{2\alpha\beta}$ y $\sigma_i[\mathfrak{T}_\alpha^A]$ usando G_{1AB} , $G_{2\alpha\beta}$.

Lema 33 *El operador $\mathfrak{T}_\alpha^A = \mathfrak{N}_\alpha^A + \varepsilon e^{i\theta} E_\alpha^A : \Phi_R \rightarrow \Psi_L$ tiene valores singulares $\sigma_i[\mathfrak{T}_\alpha^A] = O(\varepsilon^{l_i})$ con $i = 1, \dots, u$ para algunos l_i si y solo si $\hat{\sigma}_i[\mathfrak{T}_\alpha^A] = O(\varepsilon^{l_i})$.*

Prueba. Si llamamos $\lambda_i[\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}]$ a los autovalores de $\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}$ entonces

$$\hat{\sigma}_i[\mathfrak{T}] = \sqrt{\lambda_i[\mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T}]} = \sqrt{\lambda_i[V^{-1} \circ \mathfrak{T}^* \circ \mathfrak{T} \circ V]} = \sigma_i[U^{-1} \circ \mathfrak{T} \circ V]. \quad (\text{B.3})$$

La última igualdad es fácil de probar.

Consideremos $\text{rango}(\mathfrak{T}_\alpha^A) = r$, recordamos que de la definición de los valores singulares

$$\sigma_1[\mathfrak{T}] \geq \sigma_2[\mathfrak{T}] \geq \dots \geq \sigma_r[\mathfrak{T}] > 0 = \sigma_{r+1}[\mathfrak{T}] = \dots = \sigma_u[\mathfrak{T}]$$

En [29] se prueban las siguientes desigualdades

$$\sigma_e[U^{-1}] \sigma_u[V] \sigma_i[\mathfrak{T}] \leq \sigma_i[U^{-1} \circ \mathfrak{T} \circ V] \leq \sigma_i[\mathfrak{T}] \sigma_1[U^{-1}] \sigma_1[V] \quad \forall i = 1, \dots, u$$

notemos que $\sigma_u[V], \sigma_e[U^{-1}] > 0$ (no nulos) ya que V y U son invertibles.

Con esta expresión, fácilmente concluimos que si $\sigma_i[\mathfrak{T}] = O(\varepsilon^{l_i})$ entonces $\sigma_i[U^{-1} \circ \mathfrak{T} \circ V] = O(\varepsilon^{l_i}) \quad \forall i$ por lo que usando la expresión B.3 vemos que $\hat{\sigma}_i[\mathfrak{T}] = \sigma_i[U^{-1} \circ \mathfrak{T} \circ V] = O(\varepsilon^{l_i})$. ■

Teorema 34 Sea $\mathfrak{T}_\alpha^A = \mathfrak{N}_\alpha^A + \varepsilon e^{i\theta} E_\alpha^A$ para algun $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que $0 \leq \varepsilon < 1$, con ε real y $\text{rango}(\mathfrak{N}) = r$. Consideramos \mathfrak{T} en una base en la cual $G_{1AB} = \text{diag}(1, \dots, 1) = \delta_{1AB}$, $G_{2\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1) = \delta_{2\alpha\beta}$, y tal que en esta base la SVD de \mathfrak{N} es

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\alpha^A &= (U_2, U_1, U_3)_{\tilde{A}}^A \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{A}} \delta_2^{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}(V_2, V_1)_{\tilde{\gamma}}^\rho \delta_{2\rho\alpha} \\ &= (U_2, 0, 0)_{\tilde{A}}^A \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{A}} \delta_2^{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}(V_2, 0)_{\tilde{\gamma}}^\rho \delta_{2\rho\alpha} \end{aligned}$$

Entonces

1) Si $\sigma_i[\mathfrak{N}] > 0$ con $i = 1, \dots, r$ son los valores singulares no nulos de \mathfrak{N} , los primeros r valores singulares de \mathfrak{T} pueden ser expandidos como

$$\sigma_i[\mathfrak{T}] = \sigma_i[\mathfrak{N}] + |\varepsilon| \xi_i + O(\varepsilon^2) \quad \text{con } i = 1, \dots, r$$

para algunos ξ_i (ver [26]).

2) Si $\sigma_i[\mathfrak{N}] = 0$ con $i = r+1, \dots, u$ son los valores singulares nulos de \mathfrak{N} , los $u-r$ restantes valores singulares de \mathfrak{T} pueden ser expandidos como

$$\begin{aligned} \sigma_i &\left[\mathfrak{N} + \varepsilon e^{i\theta} E \right] \\ &= 0 + |\varepsilon| \sigma_i \left[\delta_1^{\tilde{A}\tilde{B}}(0, U_1, U_3)_{\tilde{B}}^C \delta_{1CD} E_\alpha^D(0, V_1)_{\tilde{\gamma}}^\alpha \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

con $\tilde{A} = r+1, \dots, e; \tilde{B} = 1, \dots, e; \tilde{\gamma} = r+1, \dots, u$.

¹Nótese que la ecuación (B.4) no depende de θ .

¹Esos valores singulares no son diferenciables respecto de ε , en $\varepsilon = 0$, debido a la presencia del modulo, pero pueden ser derivados respecto de $|\varepsilon|$.

Apéndice C

Prueba del teorema 20.

Consideremos la condición resolvente de Kreiss ec. (2.24). En su forma equivalente es

$$\frac{1}{C}\varepsilon \leq \min_{j \in \{1, \dots, u\}} \sigma_j [A_\gamma^{\alpha a} k_a - \lambda_R \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha] \quad (\text{C.1})$$

donde $s = \lambda_R + i\varepsilon$ y estamos usando que para cualquier matriz invertible $B \in \mathbb{C}^{u \times u}$, $|B^{-1}| = \frac{1}{\min_{j \in \{1, \dots, u\}} \sigma_j[B]}$, con $\sigma_j[B]$ los valores singulares de B (ver [29]).

Vamos a probar que la ecuación (C.1) vale para todo $\lambda_R \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$ si y solo si todos los autovalores $\tau_i(k)$ de $A_\gamma^{\alpha a} k_a$ son reales y para todo $i \in F_{(k)} = \{1, \dots, w_{(k)}\}$ y todo k_a tal que $k_a t^a = 0$, con $|k| = 1$, y los ángulos principales $\theta_l^{\tau_i(k)}$ entre $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$ están acotados como sigue

$$\cos \theta_l^{\tau_i(k)} \geq \cos \vartheta > 0 \quad (\text{C.2})$$

\Leftarrow) Consideremos el lado derecho de (C.1), con $\lambda_R = \tau_i(k)$ y $0 \leq \varepsilon < 1$. Como vimos en el capítulo anterior, el orden de los valores singulares viene dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_{u-r_{\tau_i(k)}+l} [A_\gamma^{\alpha a} k_a - \tau_i(k) \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha] &= \varepsilon \sigma_l [T^{\tau_i(k)}] + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \cos \theta_l^{\tau_i(k)} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

con $l \in I_{\tau_i(k)} := \{1, \dots, r_{\tau_i(k)}\}$ y $(T^{\tau_i(k)})^i_j$ como en la ecuación (4.7). Con, $\sigma_l [T^{\tau_i(k)}] = \cos \theta_l^{\tau_i(k)}$, donde $\theta_l^{\tau_i(k)}$ son los ángulos principales entre los subespacios $\Upsilon_L^{\tau_i(k)}$ y $\Phi_R^{\tau_i(k)}$. Ya que por la hipótesis de arriba (ec. C.2) esos cosenos están acotados por debajo, para todo $\tau_i(k)$, l y k_a , esto significa que los valores singulares de $A_\gamma^{\alpha a} k_a - \tau_i \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha$ son de orden $O(\varepsilon^0)$ u $O(\varepsilon^1)$. Entonces por teorema 14 la matriz $A_\gamma^{\alpha a} k_a$ es diagonalizable para todo $k_a t^a = 0$ con $|k| = 1$. Por lo que la ec. (C.1) vale para $\frac{1}{C} = \cos \vartheta$ y $0 \leq \varepsilon < 1$. Extendemos la prueba para todo ε . Para hacer eso, tomamos el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la ec. (2.24), (de dos formas diferentes) obteniendo una cota superior para los auto

proyectores de $A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a$ (ver [20]), que nos lleva a concluir la implicación. Primero tomamos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| (A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a - \tau_i(k) \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha)^{-1} \right| \varepsilon \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\min_{j \in \{1, \dots, u\}} \sigma_j [A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a - \tau_i(k) \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha]} \\ &= \frac{1}{\min_{l \in I_{\tau_i(k)}} \cos \theta_l^{\tau_i(k)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Por otro lado, ya que sabemos que $A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a$ es diagonalizable, esta puede ser escrita en terminos de los auto-proyectores $(P^j(k))_\gamma^\alpha$ como

$$A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a = \sum_{i \in F(k)} \tau_j(k) (P^j(k))_\gamma^\alpha$$

donde $(P^i(k))_\gamma^\alpha (P^j(k))_\gamma^\gamma = \sum_{j \in F(k)} \delta_j^i (P^j(k))_\gamma^\alpha$ y $\sum_{j \in F(k)} (P^j(k))_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\alpha$. Por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| (A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a - \tau_i(k) \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha)^{-1} \right| \varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \sum_{j \in F(k)} \frac{\varepsilon}{(\tau_j(k) - \tau_i(k) - i\varepsilon)} (P^j(k))_\gamma^\alpha \right| \\ &= \left| (P^i(k))_\gamma^\alpha \right| \end{aligned}$$

de donde concluimos que,

$$\left| (P^i(k))_\gamma^\alpha \right| = \frac{1}{\min_{l \in I_{\tau_i(k)}} \cos \theta_l^{\tau_i(k)}}$$

Debido a la eq. (C.2), los P^j resultan acotados

$$\left| (P^j(k))_\gamma^\alpha \right| \leq \frac{1}{\cos \vartheta} = C$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| (A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a - \lambda_R \delta_\gamma^\alpha - i\varepsilon \delta_\gamma^\alpha)^{-1} \right| \varepsilon &= \left| \sum_{j \in F(k)} \frac{\varepsilon}{(\tau_j(k) - \lambda_R - i\varepsilon)} (P^j(k))_\gamma^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{j \in F(k)} \left| \frac{\varepsilon}{(\tau_j(k) - \lambda_R - i\varepsilon)} \right| \left| (P^j(k))_\gamma^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{j \in F(k)} \left| (P^j(k))_\gamma^\alpha \right| \\ &\leq uC \end{aligned}$$

donde en la tercer linea usamos que $\frac{|\varepsilon|}{|(\tau_j(k) - \lambda_R - i\varepsilon)|} \leq 1$.

\Rightarrow) Si la condición de Kreiss vale, sabemos por la definición 3, que $A_\gamma^{\alpha\alpha} k_a$ es diagonalizable con autovalores reales para todo k_a . Ya que ahora la ec. (C.4) es acotado por arriba por C , concluimos, usando ec.. (C.5), que

$$\frac{1}{\min_{l \in I_{\tau_i(k)}} \cos \theta_l^{\tau_i(k)}} \leq C$$

para todo $i \in F_{(k)}$ y todo k_a . Esto concluye la prueba del teorema.

Apéndice D

Descomposición de Kronecker de sistemas hiperbólicos.

En este apéndice mostramos como construir las bases de la descomposición de Kronecker del símbolo principal. Vamos a usar el kernel por izquierda de $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b$ (con $l(\lambda)_a \in S_{n_a}^\mathbb{C}$ para algún n_a), llamado $\Psi_L^\lambda \subseteq \Psi_L$, para construir estas bases. Estos vectores son X_A tales que

$$X_A \mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b = X_A \left[\lambda \left(-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b \right) + \left(\mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b \right) \right] = 0. \quad (D.1)$$

Consideramos sistemas hiperbólicos por lo que $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b$ no tiene kernel por derecha, esto implica que el sistema solo admite dos tipos de bloques, de Jordan y L_m^T . Por otro lado por Lema 23 solo vamos a considerar bloques de Jordan de dimensión 1.

Ya que esta descomposición se hace punto a punto, de ahora en adelante llamamos a

$$E_\eta^A := (-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b) \quad B_\alpha^A := (\mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b)$$

y estamos pensando que ambas están evaluadas en puntos genéricos (x, ϕ, n, k) .

Consideremos primero el caso $e = u$, donde $e = \dim "A" = \dim " \alpha " = u$. En este caso $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b$ tiene solo bloques de Jordan, es decir

$$\begin{aligned} & \mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b \\ &= \sum_{i=1}^u v^{iA} (v_{iA} E_\alpha^A) (\lambda - \lambda_i) \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} &= v^{1A} (v_{1A} E_\alpha^A) (\lambda - \lambda_1) + v^{2A} (v_{2A} E_\alpha^A) (\lambda - \lambda_2) + \dots + v^{uA} (v_{uA} E_\alpha^A) (\lambda - \lambda_u) \\ &= \begin{pmatrix} v^{1A} & v^{2A} & \dots & v^{uA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \lambda_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1A} E_\alpha^A \\ v_{2A} E_\alpha^A \\ \dots \\ v_{uA} E_\alpha^A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (D.3)$$

Aquí el conjunto $\{v_{jA} \text{ con } j = 1, \dots, u\}$ expande Ψ_L , esos elemento pertenecen a Ψ_L^λ para distintos $\lambda = \lambda_i$ y son tales que ellos completan una base. Es decir

$$v_{iA} \mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda_i)_b = 0, \quad (D.4)$$

y $\{v^{iA}\}$ son las co-bases,

$$v^{jA}v_{iA} = \delta_i^j$$

En la ec. (D.3) los vectores $\{v^{jA}\}$ están puestos en forma de columnas y los co-vectores $v_{1A}E_\alpha^A$ en forma de filas. Notemos que

$$\sum_{i=1}^u v^{iA} (v_{iA}E_\alpha^A) = \left(-\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b \right),$$

$$\sum_{i=1}^u v^{iA} (v_{iA}E_\alpha^A) \lambda_i = \left(\mathfrak{N}_\eta^{Ab} k_b \right).$$

Recordemos que en este caso es posible calcular los λ_i resolviendo la ecuación polinomial $\det(\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b) = 0$ para λ .

En el caso $e > u$ la descomposición (punto a punto) tiene además de los bloques de Jordan, bloques L_m^T adicionales. Debido a que $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} n_b$ tiene rango máximo, esto evita la aparición de otros bloques.

Como antes, vamos a usar el kernel por izquierda para realizar la descomposición. Para λ arbitrarios, $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b$ tiene kernel por izquierda de dimensión fija $c = e - u$, llamado $\Delta(\lambda)$. Este depende polinomialmente de λ y es generado por un conjunto de co-vectores independientes $\{\chi_A^i(\lambda)\}$ con $i = 1, \dots, e - u$ tal que $\chi_A^i(\lambda) \mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Los coeficientes de los $\chi_A^i(\lambda)$ son polinomios en λ . De todas los posibles bases de $\Delta(\lambda)$ tomamos el primer co-vector $\chi_A^1(\lambda)$, no nulo, tal que este tiene el menor grado m_1 en λ . Este es

$$\chi_A^1(\lambda) = ((\theta_{m_1})_A - \lambda(\theta_{m_1-1})_A + \lambda^2(\theta_{m_1-2})_A - \dots - \lambda^{m_1}\theta_{0A}) \quad (D.5)$$

Con los $(\theta_s)_A$ independientes de λ . Continuamos eligiendo $\chi_A^2(\lambda)$ independiente de $\chi_A^1(\lambda)$ y de menor grado también, tal que

$$m_1 \leq m_2$$

Realizamos este proceso hasta completar una base de $\Delta(\lambda)$. Por lo que finalizamos con un set de escalares que llamamos índices mínimos para las filas de $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b$, ellos son

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{e-u}.$$

Esto definen los bloques $L_{m_i}^T$ de $\mathfrak{N}_\eta^{Ab} l(\lambda)_b$.

En particular, para cada $\chi_A^{m_1}$ como en la ec. (D.5) vale que

$$(\theta_{m_1})_A B_\alpha^A = 0 \quad (\theta_{m_1-1})_A B_\alpha^A = (\theta_{m_1})_A E_\eta^A \quad \dots \quad (D.6)$$

$$\dots \quad (\theta_0)_A B_\alpha^A = (\theta_1)_A E_\eta^A \quad (\theta_0)_A E_\eta^A = 0 \quad (D.7)$$

El ejemplo en la ecuación (4.11) tiene $2 \times L_0^T$ (dos filas nulas), $1 \times L_1^T$, $2 \times L_2^T$ que se corresponden con índices mínimos $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$ y $m_4 = 2$.

Por otro lado, cuando $\lambda = \lambda_i^{-1}$ los autovalores generalizados, el kernel por izquierda aumenta con un nuevo conjunto de co-vectores llamados $\{v_{iA}\}$. Notemos que siempre podemos sumarle combinaciones lineales de los $\{\chi_A^i(\lambda_i)\}$.

Juntando todos los $\{v_{iA}\}$ asociados a los diferentes λ_i y todos los $\{\chi_A^i(\lambda)\}$ ellos forman una base de Ψ_L . Estos vectores son usados para realizar la descomposición del siguiente ejemplo, cuya estructura de Kronecker es $3 \times J_1$, $1 \times L_3$ y $2 \times L_0$, donde $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $m_3 = 3$.

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{N}_\eta^{Ab}(\lambda)_b \\
 &= \begin{pmatrix} v^{1A} & v^{2A} & v^{3A} & \theta^{3A} & \theta^{2A} & \theta^{1A} & \theta^{0A} & \tilde{\theta}^{0A} & \hat{\theta}^{0A} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1C} E_\alpha^C \\ v_{2C} E_\alpha^C \\ v_{3C} E_\alpha^C \\ \theta_{3C} E_\alpha^C \\ \theta_{2C} E_\alpha^C \\ \theta_{1C} E_\alpha^C \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^3 v^{iA} (v_{iA} E_\alpha^A) (\lambda - \lambda_i) + \lambda \sum_{i=1}^{m_3=3} \theta^{iA} (\theta_{iC} E_\alpha^C) + \sum_{i=0}^{m_3=3} \theta^{iA} ((\theta_{i+1})_C E_\alpha^C) \\
 &= \lambda [v^{1A} (v_{1C} E_\alpha^C) + v^{2A} (v_{2C} E_\alpha^C) + v^{3A} (v_{3C} E_\alpha^C) \\
 &+ \theta^{3A} (\theta_{3C} E_\alpha^C) + \theta^{2A} (\theta_{2C} E_\alpha^C) + \theta^{1A} (\theta_{1C} E_\alpha^C)] \\
 &- \lambda_1 v^{1A} (v_{1C} E_\alpha^C) - \lambda_2 v^{2A} (v_{2C} E_\alpha^C) - \lambda_3 v^{3A} (v_{3C} E_\alpha^C) \\
 &+ \theta^{2A} (\theta_{3C} E_\alpha^C) + \theta^{1A} (\theta_{2C} E_\alpha^C) + \theta^{0A} (\theta_{1C} E_\alpha^C)
 \end{aligned}$$

Los $\{v_{iA}\}$ son los autovectores asociados los diferentes λ_i , $\hat{\theta}_{0A}$, $\tilde{\theta}_{0A}$ definen los bloques $L_{m_1}^T = L_{m_1}^T = L_0^T$, θ_{iA} con $i = 0, \dots, 3$ definen el bloque $L_{m_3}^T = L_3^T$. Acá los λ_i pueden estar degenerados, es decir, ellos pueden tomar el mismo valor.

Los vectores con los índices arriba son la co-base, tal que

$$\begin{aligned}
 v^{iA} v_{jA} &= \delta_j^i \text{ con } i, j = 1, 2, 3 \\
 \theta^{iA} \theta_{jA} &= \delta_j^i \text{ con } i, j = 1, 2, 3 \\
 \hat{\theta}^{0A} \hat{\theta}_{0A} &= 1, \\
 \tilde{\theta}^{0A} \tilde{\theta}_{0A} &= 1,
 \end{aligned}$$

y cualquier otra contracción se anula.

¹Recordamos que los λ_i pueden ser calculados con la ecuación (3.2).

Bibliografía

- [1] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. SIAM, 2004.
- [2] Fernando Abalos. A necessary condition for strong hyperbolicity of general first order systems. *arXiv preprint arXiv:1707.05011, accepted to be published in the Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2017.
- [3] Fernando Abalos and Oscar Reula. On necessary and sufficient conditions for strong hyperbolicity. *arXiv preprint arXiv:1811.05558*, 2018.
- [4] Robert P. Geroch. Partial differential equations of physics. In *General relativity. Proceedings, 46th Scottish Universities Summer School in Physics, NATO Advanced Study Institute, Aberdeen, UK, July 16-29, 1995*, 1996.
- [5] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, pages 49–52, 1902.
- [6] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 47. Siam, 1989.
- [7] Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, and Joseph Oliger. *Time dependent problems and difference methods*, volume 24. John Wiley & Sons, 1995.
- [8] Michael E Taylor. Pseudodifferential operators and nonlinear pde, vol. 100 of progress in mathematics, 1991.
- [9] Olivier Sarbach and Manuel Tiglio. Continuum and discrete initial-boundary value problems and einstein’s field equations. *Living reviews in relativity*, 15(1):9, 2012.
- [10] Oscar A Reula. Hyperbolic methods for einstein’s equations. *Living Reviews in Relativity*, 1(1):3, 1998.
- [11] Harald P Pfeiffer and Andrew I MacFadyen. Hyperbolicity of force-free electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:1307.7782*, 2013.
- [12] Federico L Carrasco and OA Reula. Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics. *Physical Review D*, 93(8):085013, 2016.

- [13] Fernando Abalos, Federico Carrasco, Érico Goulart, and Oscar Reula. Nonlinear electrodynamics as a symmetric hyperbolic system. *Physical Review D*, 92(8):084024, 2015.
- [14] Simonetta Frittelli and Oscar A Reula. First-order symmetric hyperbolic einstein equations with arbitrary fixed gauge. *Physical Review Letters*, 76(25):4667, 1996.
- [15] Helmut Friedrich. Hyperbolic reductions for einstein's equations. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1451, 1996.
- [16] Lawrence E Kidder, Mark A Scheel, and Saul A Teukolsky. Extending the lifetime of 3d black hole computations with a new hyperbolic system of evolution equations. *Physical Review D*, 64(6):064017, 2001.
- [17] Ericourgoulhon. *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, volume 846. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] Oscar A Reula. Strongly hyperbolic systems in general relativity. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(02):251–269, 2004.
- [19] Heinz-Otto Kreiss. Über matrizen die beschränkte halbgruppen erzeugen. *Mathematica Scandinavica*, pages 71–80, 1959.
- [20] Gilbert Strang et al. On strong hyperbolicity. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 6(3):397–417, 1967.
- [21] Michael E Taylor. Pseudodifferential operators. In *Partial Differential Equations II*, pages 1–73. Springer, 1996.
- [22] Guy Métivier. L 2 well-posed cauchy problems and symmetrizability of first order systems [problèmes de cauchy bien posés dans l 2 et symétrisabilité pour les systèmes du premier ordre]. *Journal de l'École polytechnique-Mathématiques*, 1:39–70, 2014.
- [23] Michael Taylor. *Partial differential equations II: Qualitative studies of linear equations*, volume 116. Springer Science & Business Media, 2013.
- [24] Jeffrey Rauch et al. Precise finite speed with bare hands. *Methods and Applications of Analysis*, 12(3):267–278, 2005.
- [25] Julio Moro and Froilán M Dopico. First order eigenvalue perturbation theory and the newton diagram. In *Applied Mathematics and Scientific Computing*, pages 143–175. Springer, 2002.
- [26] Torsten Söderström. *Perturbation results for singular values*. Institutionen för informationsteknologi, Uppsala universitet, 1999.
- [27] Sun Ji-guang. Sensitivity analysis of zero singular values and multiple singular values. *Journal of Computational Mathematics*, pages 325–335, 1988.

- [28] Gilbert W Stewart. A second order perturbation expansion for small singular values. *Linear Algebra and Its Applications*, 56:231–235, 1984.
- [29] Gilbert W Stewart. Matrix perturbation theory. 1990.
- [30] Brandon Cartter. *General relativity; an Einstein centenary survey, edited by Hawking, Stephen W and Israel, Werner*. Cambridge University Press, 1979.
- [31] Toshio Uchida. Theory of force-free electromagnetic fields. i. general theory. *Physical Review E*, 56(2):2181, 1997.
- [32] Oscar A Reula and Marcelo E Rubio. Ill posedness of force-free electrodynamics in euler potentials. *Physical Review D*, 95(6):064005, 2017.
- [33] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. Spinors and space-time: Two spinor calculus and relativistic fields, vol. 1. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, 1987)*, 1984.
- [34] Samuel E Gralla and Ted Jacobson. Spacetime approach to force-free magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(3):2500–2534, 2014.
- [35] SS Komissarov. Time-dependent, force-free, degenerate electrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 336(3):759–766, 2002.
- [36] Roger D Blandford and Roman L Znajek. Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179(3):433–456, 1977.
- [37] Yvonne Choquet-Bruhat. *General relativity and the Einstein equations*. Oxford University Press, 2009.
- [38] Masaaki Yamada, Russell Kulsrud, and Hantao Ji. Magnetic reconnection. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):603, 2010.
- [39] Carlos Palenzuela. Modelling magnetized neutron stars using resistive magnetohydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page stt311, 2013.
- [40] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, Oscar Reula, and Luciano Rezzolla. Beyond ideal mhd: towards a more realistic modelling of relativistic astrophysical plasmas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394(4):1727–1740, 2009.
- [41] Gabriel Nagy, Omar E Ortiz, and Oscar A Reula. Strongly hyperbolic second order einstein’s evolution equations. *Physical Review D*, 70(4):044012, 2004.
- [42] B-W Schulze. *Pseudo-differential operators on manifolds with singularities*, volume 24. Elsevier, 1991.

- [43] AP Calderon. Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations. In *Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math., Gordon and Breach, New York*, pages 147–195, 1962.
- [44] Lars Hormander. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Annals of Mathematics*, pages 129–209, 1966.
- [45] Jacques Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Courier Corporation, 2014.
- [46] Bent E Petersen. *Introduction to the Fourier transform & pseudo-differential operators*. Pitman Advanced Publishing Program, 1983.
- [47] Louis Nirenberg. *Lectures on linear partial differential equations*, volume 17. American Mathematical Soc., 1973.
- [48] Kurt Otto Friedrichs. *Pseudo-differential operators: an introduction. Lectures given in 1967-68 at the Courant Institute*. Courant Institute of mathematical sciences, 1970.
- [49] François Treves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators Volume 2: Fourier integral operators*, volume 2. Springer Science & Business Media, 1980.
- [50] Peter D Lax. The L_2 operator calculus of mikhlin, calderon and zygmund. *Mimeographed Lecture Note*, 1963.
- [51] JJ Kohn. Pseudo-differential operators and. *Partial differential equations*, 23:61, 1973.
- [52] Lars Hormander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:501–517, 1965.
- [53] Gene H Golub and Charles F Van Loan. *Matrix computations*, vol. 3, 2012.
- [54] FR Gantmacher. *The theory of matrices*, vol. 1, chelsea, new york, 1959. *Google Scholar*, 1992.
- [55] Feliks Ruvimovich Gantmakher. *The theory of matrices*, volume 131. American Mathematical Soc., 1998.
- [56] Pavel Motloch, Wayne Hu, and Hayato Motohashi. Self-accelerating massive gravity: Hidden constraints and characteristics. *Phys. Rev. D*, 93:104026, May 2016.
- [57] Leo Taslaman. *The principal angles and the gap*. 2014.
- [58] Sydney N Afriat. Orthogonal and oblique projectors and the characteristics of pairs of vector spaces. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53, pages 800–816. Cambridge University Press, 1957.

- [59] H. Euler and B. Köckel. On the scattering of light from light in the Dirac theory. *Naturwiss.*, 23:246, 1935.
- [60] W. Heisenberg and H. Euler. Consequences of Diracs theory of positrons. *Z. Phys.*, 98:714, 1936.
- [61] R. Karplus and M. Neuman. The scattering of light by light. *Physical Review*, 83(4):776, 1951.
- [62] J. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82(5):664, 1951.
- [63] Steven K. Blau, Matt Visser, and Andreas Wipf. Analytic results for the effective action. *International Journal of Modern Physics A*, 6(30):5409–5433, 1991.
- [64] Roberto Soldati and Lorenzo Sorbo. Effective action for Dirac spinors in the presence of general uniform electromagnetic fields. *Physics Letters B*, 426(1):82–88, 1998.
- [65] Gerald V Dunne. Heisenberg-Euler effective lagrangians: basics and extensions. *arXiv preprint hep-th/0406216*, pages 445–522, 2004.
- [66] Yuen-Ron Shen. Principles of nonlinear optics. 1984.
- [67] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge university press, 1999.
- [68] Nora Bretón. Nonlinear electrodynamics and cosmology. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 229, page 012006. IOP Publishing, 2010.
- [69] VA De Lorenci, R Klippert, M Novello, and JM Salim. Nonlinear electrodynamics and frw cosmology. *Physical Review D*, 65(6):063501, 2002.
- [70] M Novello, SE Perez Bergliaffa, and J Salim. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. *Physical Review D*, 69(12):127301, 2004.
- [71] M Novello, E Goulart, JM Salim, and SE Perez Bergliaffa. Cosmological effects of nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 24(11):3021, 2007.
- [72] Ricardo García-Salcedo, Tame Gonzalez, and Israel Quiros. No compelling cosmological models come out of magnetic universes which are based on nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, 89(8):084047, 2014.
- [73] Ariadna Montiel, Nora Bretón, and Vincenzo Salzano. Parameter estimation of a nonlinear magnetic universe from observations. *General Relativity and Gravitation*, 46(7):1–16, 2014.
- [74] JF Plebański et al. Type-d solutions of the einstein and Born-Infeld nonlinear-electrodynamics equations. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 84(1):65–90, 1984.

- [75] Nora Bretón. Born-Infeld black hole in the isolated horizon framework. *Physical Review D*, 67(12):124004, 2003.
- [76] Wissam A Chemsy, Mees De Roo, and Sudhakar Panda. Thermodynamics of Born-Infeld black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 25(22):225009, 2008.
- [77] Sharmila Gunasekaran, David Kubizňák, and Robert B Mann. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization. *Journal of High Energy Physics*, 2012(11):1–43, 2012.
- [78] Eloy Ayon-Beato and Alberto Garcia. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Physical review letters*, 80(23):5056, 1998.
- [79] Nora Bretón and Santiago Esteban Perez Bergliaffa. On the thermodynamical stability of black holes in nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*, 354:440–453, 2015.
- [80] M Born and L Infeld. Foundations of the new field theory. *Nature*, 132:1004, 1933.
- [81] Max Born. Modified field equations with a finite radius of the electron. *Nature*, 132:282, 1933.
- [82] Max Born and Leopold Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, pages 425–451, 1934.
- [83] G. W. Gibbons. Aspects of Born-Infeld theory and string/m-theory. *Rev. Mex. Fis.* 49S1, 19, 2003.
- [84] JF Plebanski. Lectures on non-linear electrodynamics. 1970.
- [85] Jacques Hadamard. *LECONS SUR UN PROPAGATION DES ONDES*. 1903.
- [86] Yuri N. Obukhov and Guillermo F. Rubilar. Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 66:024042, Jul 2002.
- [87] Yuri N Obukhov, Tetsuo Fukui, and Guillermo F Rubilar. Wave propagation in linear electrodynamics. *Physical Review D*, 62(4):044050, 2000.
- [88] Guillermo F Rubilar, Yuri N Obukhov, and Friedrich W Hehl. Generally covariant fresnel equation and the emergence of the light cone structure in linear pre-metric electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, 11(08):1227–1242, 2002.
- [89] Guy Boillat. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):941–951, 1970.
- [90] Érico Goulart de Oliveira Costa and Santiago Esteban Perez Bergliaffa. A classification of the effective metric in nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 26(13):135015, 2009.

- [91] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and space-time: Volume 2, Spinor and twistor methods in space-time geometry*. Cambridge University Press, 1988.
- [92] Felix AE Pirani. Introduction to gravitational radiation theory. *Lectures on general relativity*, 1:249–373, 1964.
- [93] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [94] K. Hoffman and R.A. Kunze. *Linear algebra*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, 1971.
- [95] GW Gibbons and CAR Herdeiro. Born-infeld theory and stringy causality. *Physical Review D*, 63(6):064006, 2001.
- [96] Barton Zwiebach. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, 156(5):315–317, 1985.
- [97] C-D Munz, P Ommes, and R Schneider. A three-dimensional finite-volume solver for the maxwell equations with divergence cleaning on unstructured meshes. *Computer Physics Communications*, 130(1-2):83–117, 2000.
- [98] Daniela Alic, Carles Bona-Casas, Carles Bona, Luciano Rezzolla, and Carlos Palenzuela. Conformal and covariant formulation of the z4 system with constraint-violation damping. *Physical Review D*, 85(6):064040, 2012.
- [99] David S Watkins. *Fundamentals of matrix computations*, volume 64. John Wiley & Sons, 2004.
- [100] GW Stewart. Introduction to matrix computations (academic, new york, 1973). *Google Scholar*, pages 184–230, 1939.